Schnittpunkt zweier Einzelfunktionen einer zerlegten speziellen bilogarithmischen Funktion

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 28. Januar 2015 – Letzte Revision: 20. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Einleitung

Gegeben ist eine spezielle, bilogarithmische Funktion $y = h(x)$, welche die Koeffizienten bzw. Freiheitsgrade $p > 0$ und $q > 0$ besitzt. Vorliegend, die parametrische Beschreibung der interessierenden Funktion. [001]

1.1 Der Sonderfall $p = q = 1$

$$x = e^{-t} \qquad y = -\ln t$$

Wobei durch Koordinatentransformation $t \to y, x \to t$ bzw. $t \to x, y \to t$ beide Darstellungen in einander überführt werden können.

$$t = e^{-y} \qquad t = -\ln x$$

$\Rightarrow$

$$-\ln t = y \qquad e^{-t} = x$$

Die Parameterdarstellung insgesamt kann in das kartesische Koordinatensystem transformiert werden.

$$t = -\ln x \qquad y = \ln t$$

$\Rightarrow$

$$y = -\ln(-\ln x)$$

1.2 Der allgemeine Fall $p \neq 1$ oder $q \neq 1$

Gegeben ist die parametrische Beschreibung einer speziellen Funktion.

$$x = p \cdot e^{-q \cdot t} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

Wobei durch Koordinatentransformation $t \to y, x \to t$ bzw. $t \to x, y \to t$ beide Darstellungen in einander überführt werden können.

$$t = p \cdot e^{-q \cdot y} \qquad t = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p} = y \qquad p \cdot e^{-q \cdot t} = x$$

Die Parameterdarstellung insgesamt kann in das kartesische Koordinatensystem transformiert werden.

$$t = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

$\Rightarrow$

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{x}{p} \right)$$

Letzterer Ausdruck ist die vorliegende Arbeitsgleichung. Die parametrische Beschreibung ist von Interesse.

$$x = p \cdot e^{-q \cdot t} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

2 Koordinatentransformation und Schnittpunkt

Im letzten Abschnitt ist die parametrische Darstellung der bilogarithmischen Funktion gezeigt worden.

$$x = p \cdot e^{-q \cdot t} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

Es wird eine Koordinatentransformation durchgeführt.

$$x \to y \qquad t \to x$$

$\Rightarrow$

$$y = p \cdot e^{-q \cdot x} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p}$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = p \cdot e^{-q \cdot x} \qquad g(x) = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p}$$

Gesucht ist der Schnittpunkt $f(x) = g(x)$ zwischen beiden Funktionen. Die Lösung ist nicht mit algebraischen Mitteln darstellbar, da die Exponentialfunktion sowie die Logarithmusfunktion transzendent sind.

Jedoch ist über die Arbeitsgleichung zu zeigen, dass es eine Lösung geben muss. In die Arbeitsgleichung wird $g(x)$ eingesetzt.

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{x}{p} \right)$$

$\Rightarrow$

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(\frac{1}{p} \cdot g(x) \right)$$

Umstellen und $f(x)$ einsetzten.

$$e^{-q \cdot y} = \frac{1}{p} \cdot g(x)$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = g(x)$$

Gleichzeitig ist damit gezeigt, dass für einen Schnittpunkt $P_S(x_S; y_S)$ gelten muss.

$$x_S = y_S$$

Nicht gezeigt ist, ob es mehrere Schnittpunkte geben kann mit anderen Eigenschaften.

Wenn für den Schnittpunkt $x_S = y_S$ gilt, so kann die Forderung $f(x) = g(x)$ umschrieben werden in:

$$f(x) = x \qquad g(x) = x$$

Der dort zu findende Schnittpunkt ist identisch mit P_S. Vorteil ist, dass nur noch eine Transzendente auftritt.

$$p \cdot e^{-q \cdot x} = x \qquad -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} = x$$

$\Rightarrow$

$$p \cdot e^{-q \cdot x} - x = 0 \qquad \frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} + x = 0$$

Die Lösung beider Ausdrücke ist identisch. Beide Ausdrücke sind weiterhin ineinander überführbar.

$$-\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} - x = 0$$

$\Rightarrow$

$$-\ln \frac{x}{p} - q \cdot x = 0$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\ln \frac{x}{p} - q \cdot x} = 1$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\ln \frac{x}{p}} \cdot e^{-q \cdot x} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p}{x} \cdot e^{-q \cdot x} = 1$$

$\Rightarrow$

$$g(x) = x$$

Daher:

$$f(x) \rightarrow g^{-1}(x) \qquad g(x) \rightarrow f^{-1}(x)$$

3 Ermittlung des Schnittpunktes

3.1 Für den Sonderfall $q = 1$ – die Ω- Konstante

Aus der letzten Umstellung ist eine Lösung für $q = 1$ abzulesen.

$$\frac{p}{x} \cdot e^{-x} = 1$$

$\Rightarrow$

$$x \cdot e^{x} = p$$

Die Lösung dieses Ausdrucks ist:

$$x_S^{(q=1)} = y_S^{(q=1)} = W(p)$$

Wobei $W(\bullet)$ die Lambertsche W- Funktion darstellt. Diese kann taylorisiert werden durch:

$$W(\bullet) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i$$

Damit ist die Lösung für diesen Sonderfall darstellbar.

$$x_S^{(q=1)} = y_S^{(q=1)} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot p^i$$

Für ein $p = 1$ ergibt sich die Omega- Konstante:

$$x_S = y_S = W(1) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} = \Omega$$

$\Rightarrow$

$$\Omega = 0,567143290409783872999968662210355549753815787186\ldots$$

3.2 Für den allgemeinen Fall $p \neq 1$ und $q \neq 1$

Die Ermittlung des Schnittpunktes für den allgemeinen Fall erfolgt über die originäre Berechnungsgrundlage der LambertW- Funktion. Ist eine Funktion gegeben der Form:

$$e^{-c\cdot x} = a \cdot (x - b)$$

Mit $a, b, c \in \Re$, dann ist die Lösung dieser Funktion gegeben mit:

$$x = b + \frac{1}{c} \cdot W\left(\frac{c \cdot e^{-c\cdot r}}{a}\right)$$

Im vorliegenden Fall:

$$c \to q \qquad b \to 0 \qquad a \to \frac{1}{p}$$

$\Rightarrow$

$$x_S^{(q>0;p>0)} = y_S^{(q>0;p>0)} = \frac{1}{q} \cdot W(q \cdot p)$$

Wobei $W(\bullet)$ die Lambertsche W- Funktion darstellt. Diese kann taylorisiert werden durch:

$$W(\bullet) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{q} \cdot W(q \cdot p) = -\frac{1}{q} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot (q \cdot p)^i$$

3.3 Für den Sonderfall $p = 1$ – die Ω- Konstante

Der Sonderfall $p = 1$ ist einfach aus dem allgemeinen Fall ableitbar.

$$x_S^{(q>0;p>0)} = y_S^{(q>0;p>0)} = \frac{1}{q} \cdot W(q \cdot p)$$

$\Rightarrow$

$$x_S^{(p=1)} = y_S^{(p=1)} = \frac{1}{q} \cdot W(q)$$

$\Rightarrow$

$$x_S^{(q=1)} = y_S^{(q=1)} = -\frac{1}{q} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot q^i$$

Für ein $q = 1$ ergibt sich wieder die Omega- Konstante.

4 Umschreibung der LambertW- Funktion in einer linearen Interpolation.

4.1 Vorbetrachtungen

Die Darstellung der LambertW- Funktion ist gegeben mit:

$$W(\bullet) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i$$

Nachteil dieser Summendarstellung ist deren Konvergenzverhalten. So reichen keine wenige erste Glieder aus, um $W(\bullet)$ für kleine $(\bullet)$ berechnen zu können. Betrachtet man die Differenz Δ zwischen zwei Summendarstellungen mit dem Abstand $\Delta n = 1$, dann folgt:

$$\Delta W(\bullet) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i - \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i - \sum_{i=1}^{n} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i = -\sum_{i=n}^{n} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i$$

$\Rightarrow$

$$\Delta W(\bullet) = \frac{n^n}{n \cdot n!} \cdot \bullet^n$$

Im vorliegenden Fall ist $(\bullet)$ begrenzt auf $(\bullet) \in \Re^+$ und es wird ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit geschrieben:

$$(\bullet) = p = q = 1$$

$\Rightarrow$

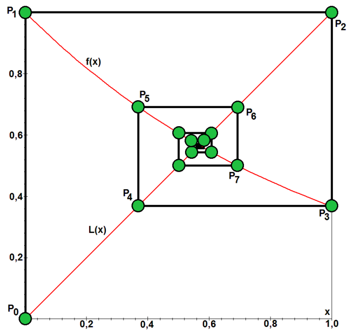
$$\Delta W(1) = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

Der Grenzwert für diesen Ausdruck ist definiert durch

$$\lim_{n \to \infty} \Delta W(1) = \infty$$

was ungünstig für die Berechnung ist. Andere, ebenfalls im Nenner fakultätsnutzende Funktionen wie die Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion besitzen einen Grenzwert gegen Null. Dadurch können schon wenige erste Glieder der Summe den Funktionswert genau darstellen.

4.2 Modell I



$$\begin{array}{ccccccc} P_0\left(x_0;y_0\right) & \rightarrow & P_1\left(x_1;y_1\right) & \rightarrow & P_2\left(x_2;y_2\right) & \rightarrow & P_3\left(x_3;y_3\right) \\ P_4\left(x_4;y_4\right) & \rightarrow & P_5\left(x_5;y_5\right) & \rightarrow & P_6\left(x_6;y_6\right) & \rightarrow & P_7\left(x_7;y_7\right) \end{array}$$

Mit:

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = x_0 \qquad y_1 = f\left(x_1\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_2 = L^{-1}\left(y_2\right) \qquad y_2 = y_1$$

$\Rightarrow$

$$x_3 = x_2 \qquad y_3 = f\left(x_3\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_4 = L^{-1}\left(y_4\right) \qquad y_4 = y_3$$

$\Rightarrow$

$$x_5 = x_4 \qquad y_5 = f\left(x_5\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_6 = L^{-1}\left(y_6\right) \qquad y_6 = y_5$$

$\Rightarrow$

$$x_7 = x_6 \qquad y_7 = f\left(x_7\right)$$

Die Berechnungsgrundlage für P_7 wäre dann:

$$x_7 = L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(0\right)\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_7 = f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(0\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

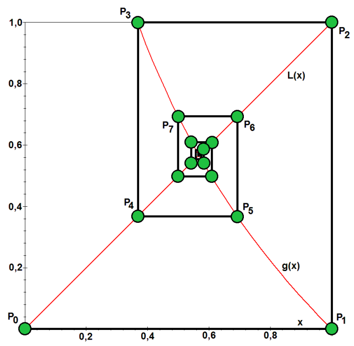
Damit ist der Schnittpunkt ermittelbar:

$$P_S\left(x_S;y_S\right)$$

Mit:

$$x_S = L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

4.3 Modell II



$$\begin{array}{ccccccc} P_0\left(x_0;y_0\right) & \rightarrow & P_1\left(x_1;y_1\right) & \rightarrow & P_2\left(x_2;y_2\right) & \rightarrow & P_3\left(x_3;y_3\right) \\ P_4\left(x_4;y_4\right) & \rightarrow & P_5\left(x_5;y_5\right) & \rightarrow & P_6\left(x_6;y_6\right) & \rightarrow & P_7\left(x_7;y_7\right) \end{array}$$

Mit:

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = g^{-1}\left(y_1\right) \qquad y_1 = y_0$$

$\Rightarrow$

$$x_2 = x_1 \qquad y_2 = L\left(x_2\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_3 = g^{-1}\left(y_3\right) \qquad y_3 = y_2$$

$\Rightarrow$

$$x_4 = x_3 \qquad y_4 = L\left(x_4\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_5 = g^{-1}\left(y_5\right) \qquad y_5 = y_4$$

$\Rightarrow$

$$x_6 = x_5 \qquad y_6 = L\left(x_6\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_7 = g^{-1}\left(y_7\right) \qquad y_7 = y_6$$

Die Berechnungsgrundlage für P_7 wäre dann:

$$x_7 = g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(0\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_7 = \ L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(0\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

Damit ist der Schnittpunkt ermittelbar:

$$P_S\left(x_S;y_S\right)$$

Mit:

$$x_S = g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(\ldots g^{-1}\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = \ L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(\ldots g^{-1}\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)$$

4.4 Zusammenführung der Modelle

Für den Schnittpunkt existieren zwei identische Berechnungsgrundlagen.

$$x_S = L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

Sowie:

$$x_S = g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(\ldots g^{-1}\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(\ldots g^{-1}\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)$$

Da in den vorangegangenen Absätzen gezeigt wurde, dass $f\left(x\right)$ und $g\left(x\right)$ ineinander überführbar sind der Form

$$f\left(x\right) \rightarrow g^{-1}\left(x\right) \qquad g\left(x\right) \rightarrow f^{-1}\left(x\right)$$

kann eine Darstellungsform für P_S gezeigt werden.

$$x_S = L\left(f\left(L\left(f\left(L\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = f\left(L\left(f\left(L\left(f\left(L\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

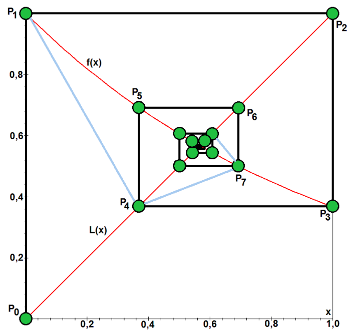
Wobei der Startwert, hier $P_0\left(0;0\right)$ in weiten Bereichen, im Rahmen der Randbedingungen gewählt werden kann, zum Beispiel ist P_1 auch ein geeigneter Kandidat.

5 Darstellung als handhabbare Berechnungsgrundlage

Nun ist gezeigte Möglichkeit der Berechnung des Schnittpunktes sehr unhandlich. Nächster Schritt ist die Überführung in eine Grundlage, mit der man ein spezielles Beispiel berechnen kann. Außerdem schauen die gewonnenen Gleichungen für x_S und y_S mehr nach einer Iteration aus, statt nach einer Interpolation. Daher soll weiter im eigentlichen Thema fortgeführt werden.

Als erstes wird die ganze Sache verkürzt. Das Um- und Einkreisen des Schnittpunktes erfolgt vorerst mittels rechtwinkligen Richtungsänderungen. Lässt man jedoch zwei (Zwischen)Punkte jeweils aus, ändert sich nichts am Modell, außer dass man sich dem Schnittpunkt jetzt spiralförmig annähert.

Folgendes Bild zeigt eine Möglichkeiten blau eingezeichnet mit Startpunkt P_1.



Betrachtet man auf dem Pfad „blau“ die y- Werte der angelaufenen Punkte $P_1, P_4, P_7, P_{10}, P_{13}, \cdots$, dann muss die Summe aller y der Schnittpunktswert x_S sein, wenn man die y- Werte der absoluten Länge nach aufsteigend halbiert.[1]

$$x_S = \frac{1}{32} \cdot y_1 + \frac{1}{16} \cdot y_4 + \frac{1}{8} \cdot y_7 + \frac{1}{4} \cdot y_{10} + \frac{1}{2} \cdot y_{13} + \ldots$$

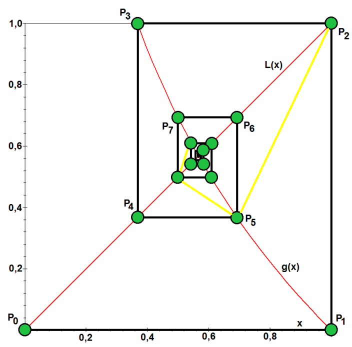
$\Rightarrow$

$$x_S = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2^{5-i+1}} \cdot y_{3 \cdot i-2} \quad \xrightarrow{n=4} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot y_{3 \cdot i-2}$$

$\Rightarrow$

$$x_S = \frac{1}{2} \cdot y_{3 \cdot n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot y_{3 \cdot i-2}$$

Ein weiteres Bild zeigt eine andere Möglichkeiten gelb eingezeichnet mit Startpunkt P_2.



Betrachtet man auf dem Pfad „gelb“ die x- Werte der angelaufenen Punkte $P_2, P_5, P_8, P_{11}, P_{14}, \cdots$, dann muss die Summe aller x der Schnittpunktswert y_S sein, wenn man die x- Werte der absoluten Länge nach aufsteigend halbiert.

$$y_S = \frac{1}{32} \cdot x_2 + \frac{1}{16} \cdot x_5 + \frac{1}{8} \cdot x_8 + \frac{1}{4} \cdot x_{11} + \frac{1}{2} \cdot x_{14} + \ldots$$

[1] Ergibt sich aus $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$ und $y = x$ und $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow$

$$y_S = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2^{5-i+1}} \cdot x_{3\cdot i-1} \quad \xrightarrow{n=4} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot x_{3\cdot i-1}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{1}{2} \cdot x_{3\cdot n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot x_{3\cdot i-1}$$

Zu beachten ist, dass beide farbigen Pfade in keinem Fall den Pfad „schwarz" kreuzen. Außer natürlich in den angelaufenen Punkten.

Benötigt wird nun nur noch eine Möglichkeit, die restlichen x_i und y_i zu berechnen.

Zuerst die Startwerte.

$$x_2 = p \qquad y_1 = p$$

Die Restwerte:

$$x_{3\cdot(n-j)+2} = \left| -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{2^{(n-j)-i+1}} \cdot x_{3\cdot i-1}\right) \right|_{j=0\cdots n-1}$$

und

$$y_{3\cdot(n-j)+1} = \left| p \cdot e^{-q\cdot \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{2^{(n-j)-i+1}} \cdot y_{3\cdot i-2}} \right|_{j=0\cdots n-1}$$

Für den bequemen Mathematiker folgend die ersten Glieder. Zuerst für x

$$x_5 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x_2\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_8 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_5\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_{11} = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot x_2 + \frac{1}{4} \cdot x_5 + \frac{1}{2} \cdot x_8\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_{14} = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot x_2 + \frac{1}{8} \cdot x_5 + \frac{1}{4} \cdot x_8 + \frac{1}{2} \cdot x_{11}\right)\right)$$

Zum Schluss für y. Damit steht der Berechnung des Schnittpunktes zwischen $f(x)$ und $g(x)$ nichts mehr im Wege.

$$y_4 = p \cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot y_1\right)}$$

$\Rightarrow$

$$y_7 = p \cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot y_1 + \frac{1}{2}\cdot y_4\right)}$$

$\Rightarrow$

$$y_{10} = p \cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot y_1 + \frac{1}{4}\cdot y_4 + \frac{1}{2}\cdot y_7\right)}$$

$\Rightarrow$

$$y_{13} = p \cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{16}\cdot y_1 + \frac{1}{8}\cdot y_4 + \frac{1}{4}\cdot y_7 + \frac{1}{2}\cdot y_{10}\right)}$$

6 Ein kleines Beispiel

Zur Erinnerung, der Schnittpunkt P_S folgender Funktionen ist gesucht.

$$f(x) = p \cdot e^{-q \cdot x} \qquad g(x) = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p}$$

Gewählt für die Koeffizienten:

$$p = 1 \qquad q = 2$$

Der Schnittpunkt ist definiert als $P_S(x_S; y_S)$ mit:

$$x_S = \frac{1}{32} \cdot y_1 + \frac{1}{16} \cdot y_4 + \frac{1}{8} \cdot y_7 + \frac{1}{4} \cdot y_{10} + \frac{1}{2} \cdot y_{13}$$

Die Anzahl 5 an Gliedern soll hier genügen. Start- und Restwerte:

$$y_1 = p = 1$$

$\Rightarrow$

$$y_4 = 1 \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right)} = 0,367879...$$

$\Rightarrow$

$$y_7 = 1 \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,367879\right)} = 0,419841...$$

$\Rightarrow$

$$y_{10} = 1 \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,367879 + \frac{1}{2} \cdot 0,419841\right)} = 0,425802...$$

$\Rightarrow$

$$y_{13} = 1 \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 0,367879 + \frac{1}{4} \cdot 0,419841 + \frac{1}{2} \cdot 0,425802\right)} = 0,426265...$$

Für x_S lässt sich dann errechnen:

$$x_S = \frac{1}{32} \cdot 1 + \frac{1}{16} \cdot 0,367879 + \frac{1}{8} \cdot 0,419841 + \frac{1}{4} \cdot 0,425802 + \frac{1}{2} \cdot 0,426265$$

$\Rightarrow$

$$x_S = 0,426305...$$

Schnell sieht man, wie sich Stützstellenwerte und Gesamtergebnis annähern. Bei einer Zweistellengenauigkeit würden zwei Interpolationsdurchläufe schon hinreichend sein. Benutzt man statt $f(x)$ die Funktion $g(x)$, dann sieht das Gesamtbild so aus:

$$y_S = \frac{1}{32} \cdot x_2 + \frac{1}{16} \cdot x_5 + \frac{1}{8} \cdot x_8 + \frac{1}{4} \cdot x_{11} + \frac{1}{2} \cdot x_{14}$$

Weiterhin:

$$x_2 = p = 1$$

$\Rightarrow$

$$x_5 = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right)\right) = 0,346573...$$

$\Rightarrow$

$$x_8 = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,346573\right)\right) = 0,429852...$$

$\Rightarrow$

$$x_{11} = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,346573 + \frac{1}{2} \cdot 0,429852\right)\right) = 0,425990...$$

$\Rightarrow$

$$x_{14} = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 0,346573 + \frac{1}{4} \cdot 0,429852 + \frac{1}{2} \cdot 0,425990\right)\right) = 0,426329...$$

Für y_S lässt sich dann errechnen:

$$y_S = \frac{1}{32} \cdot 1 + \frac{1}{16} \cdot 0,346573 + \frac{1}{8} \cdot 0,429852 + \frac{1}{4} \cdot 0,425990 + \frac{1}{2} \cdot 0,426329$$

$\Rightarrow$

$$y_S = 0,426304...$$

Der berechnete Schnittpunkt P_S liegt demnach in der Nähe von:

$$P_S\,(0,426305...; 0,426304...)$$

Für eine globale Probe das $x_S = 0,426305...$ und $y_S = 0,426304...$ die Funktionen $f\,(x)$ und $g\,(x)$ erfüllen, soll hier genügen:

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x}{1} \stackrel{?}{=} 1 \cdot e^{-2 \cdot x}$$

$\Rightarrow$

$$\ln 0,426 \stackrel{?}{=} -2 \cdot e^{-2 \cdot 0,426}$$

$\Rightarrow$

$$-0,853 \stackrel{!}{=} -0,853$$

7 Zusammenfassung und Vergleich der gezeigten Methoden

7.1 Zusammenfassung

Auf den letzten Seiten sind drei Möglichkeiten aufgezeigt worden, vorliegende Problemstellung der Schnittpunktermittlung erfolgreich durchzuführen.

- **Ermittlung über die Iterationsvorschrift – „Iter“**

$$x_S = L\left(f\left(L\left(f\left(L\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = \ f\left(L\left(f\left(L\left(f\left(L\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

- **Ermittlung über die Nullstelle – „Null“**

$$p \cdot e^{-q\cdot x} - x = 0 \qquad\qquad \frac{1}{q}\cdot\ln\frac{x}{p} + x = 0$$

- **Ermittlung über eine lineare Interpolation – „InterX/InterY“**

Mit der Voraussetzung $x_S = y_S$ ergeben sich zwei Untermethoden zur Schnittpunktermittlung.

Ermittlung über die Exponentialfunktion – InterpX:

$$x_S = \frac{1}{2}\cdot y_{3\cdot n+1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n-i+2}}\cdot y_{3\cdot i-2}$$

Mit:

$$y_1 = p$$

Sowie:

$$y_{3\cdot(n-j)+1} = \left| p\cdot e^{-q\cdot\sum\limits_{i=1}^{n-j}\frac{1}{2^{(n-j)-i+1}}\cdot y_{3\cdot i-2}} \right|_{j=0\cdots n-1}$$

Der Wert y_S wird dann ermittelt über $f\left(x\right)$ oder $g\left(x\right)$ und dient somit gleich einer Probe, da gelten muss $x_S = y_S$.

Ermittlung über die Logarithmusfunktion – InterpY:

$$y_S = \frac{1}{2}\cdot x_{3\cdot n+2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{n-i+2}}\cdot x_{3\cdot i-1}$$

Mit:

$$x_2 = p$$

Sowie:

$$x_{3\cdot(n-j)+2} = \left| -\frac{1}{q}\cdot\ln\left(\frac{1}{p}\cdot\sum_{i=1}^{n-j}\frac{1}{2^{(n-j)-i+1}}\cdot x_{3\cdot i-1}\right)\right|_{j=0\cdots n-1}$$

Der Wert x_S wird dann ermittelt über $f^{-1}\left(x\right)$ oder $g^{-1}\left(x\right)$ und dient somit gleich einer Probe, da gelten muss $x_S = y_S$.

7.2 Vergleich

Es sollen zwei Probedurchläufe gestartet werden. Dazu wird über ein geeignetes grafisches Verfahren der Schnittpunkt $P_S\left(x_S; y_S\right)$ ermittelt und danach numerisch gegengerechnet. Die Ergebnisse werden mit $P_S^{p=1;q=1}\left(x_S^{p=1;q=1}; y_S^{p=1;q=1}\right) = (0,5671; 0,5671)$ normiert.

$q = 1$										
$p =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Iter	*0,161*	*0,298*	*0,418*	*0,524*	*0,620*	*0,708*	*0,789*	*0,864*	*0,934*	*1,000*
Null	**NaN**	**NaN**	**NaN**	**NaN**	*0,620*	*0,708*	*0,789*	*0,864*	*0,934*	*1,000*
InterpX	*0,161*	*0,298*	*0,417*	*0,524*	*0,620*	*0,708*	*0,789*	*0,864*	*0,934*	*1,000*
InterpY	**NaN**	**NaN**	Nan	0,079	0,584	*0,707*	*0,789*	*0,864*	*0,934*	*1,000*
Grafisch	0,168	0,300	0,416	0,522	0,628	0,709	0,791	0,867	0,938	1,000
$p =$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Iter	*1,000*	*1,504*	3,520	6,306	8,460	10,41	12,26	14,06	15,85	17,62
Null	*1,000*	**NaN**	*1,851*	**NaN**	*2,340*	*2,525*	*2,687*	*2,831*	*2,960*	**NaN**
InterpX	*1,000*	*1,504*	*1,851*	*2,120*	*2,340*	*2,525*	*2,688*	*2,830*	*2,960*	*3,080*
InterpY	*1,000*	*1,504*	*1,851*	*2,120*	*2,340*	*2,525*	*2,688*	*2,830*	*2,960*	*3,080*
Grafisch	1,000	1,504	1,858	2,123	2,345	2,519	2,699	2,840	2,973	3,090

NaN = Not a number, *Kursiv* eingezeichnet sind numerisch ermittelte Werte, welche mit der grafischen Methode übereinstimmen. Rot eingezeichnet sind Werte, welchen einen weiteren, jedoch nicht betrachteten Schnittpunkt der Grafen $f(x)$ und $g(x)$ folgen.

$p = 1$										
$q =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Iter	*1,609*	*1,489*	*1,391*	*1,310*	*1,240*	*1,180*	*1,127*	*1,080*	*1,038*	*1,000*
Null	*1,609*	*1,489*	*1,391*	*1,310*	*1,240*	*1,180*	*1,127*	*1,080*	*1,038*	*1,000*
InterpX	*1,609*	*1,489*	*1,391*	*1,310*	*1,240*	*1,180*	*1,127*	*1,080*	*1,038*	*1,000*
InterpY	**NaN**	**NaN**	**NaN**	0,196	1,167	*1,179*	*1,127*	*1,080*	*1,038*	*1,000*
Grafisch	1,616	1,500	1,398	1,319	1,248	1,184	1,133	1,088	1,044	1,000
$q =$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Iter	*1,000*	*0,752*	1,173	1,576	1,692	1,734	1,751	1,758	1,761	1,762
Null	*1,000*	*0,752*	1,172	1,576	1,692	1,734	1,751	1,758	1,761	1,762
InterpX	*1,000*	*0,752*	*0,617*	*0,530*	*0,468*	*0,421*	*0,384*	*0,354*	*0,329*	*0,308*
InterpY	*1,000*	*0,752*	*0,617*	*0,530*	*0,468*	*0,421*	*0,384*	*0,354*	*0,329*	*0,308*
Grafisch	1,000	0,752	0,611	0,530	0,469	0,423	0,386	0,354	0,327	0,310

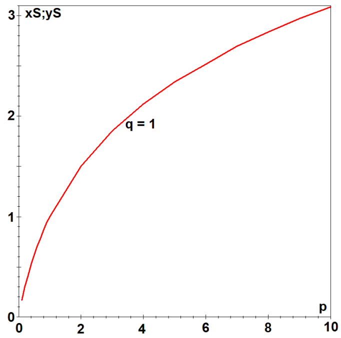
NaN = Not a number, *Kursiv* eingezeichnet sind numerisch ermittelte Werte, welche mit der grafischen Methode übereinstimmen. Rot eingezeichnet sind Werte, welchen einen weiteren, jedoch nicht betrachteten Schnittpunkt der Grafen $f(x)$ und $g(x)$ folgen.

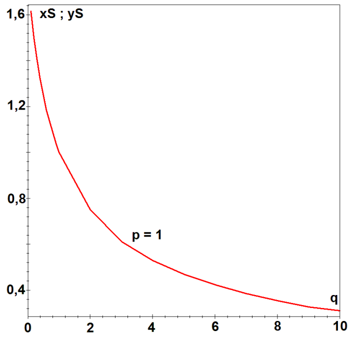
Folgende Randbedingungen sind genutzt worden zur Berechnung der Tabellenwerte.

- **Iter:**
$$n_{\text{Iter}} = 200$$
- **Null:**
$$\Delta = 1 \cdot 10^{-20}$$
- **InterpX:**
$$n_{\text{InterpX}} = 20$$
- **InterpY:**
$$n_{\text{InterpY}} = 20$$

7.3 Grafiken

Zum Schluss zwei Grafiken über die erwarteten Werte für x_S und y_S.





Bei Bedarf ist auf der Website www.Zenithpoint.de ein Classic-Maple-Worksheet© zu finden, mit den hier benutzten Berechnungsroutinen.

Letztendlich zeigt InterpX eine ausreichende Stabilität über weite Bereiche der numerischen Berechnung. InterpY ist ebenfalls geeignet zur Berechnung des Schnittpunktes unter Beachtung der Randzonen von p und q.

$\LaTeX\,2_\varepsilon$