

---

# Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie

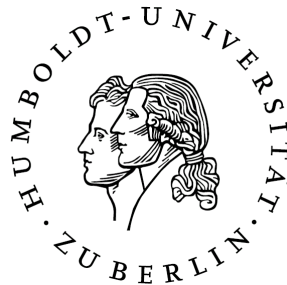
**- Gehäuse, Phasenstabilisierung, Fasereinbau -**

Masterarbeit  
im Studiengang Elektrotechnik und  
Informationstechnik  
Vertiefungsrichtung Photonik

an der



in Kooperation mit der



vorgelegt von

**Björnstjerne Zindler**

geboren am 13. November 1966 in Görlitz

eingereicht am 21. November 2011

Erstgutachter: Herr Professor Dr. A. Richter  
Zweitgutachter: Herr Professor Dr. O. Benson

---

**Meiner Mutter gewidmet**

\*03. Juli 1940

+22. September 2010

## Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen Temperaturschwankungen und QuBER in der Time- Bin- Konfiguration.

- QuBER allgemein -

- **Basierend auf:**

- REVIEWS OF MODERN PHYSICS, VOLUME 74, JANUARY 2002 „Quantum cryptography“
- Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen auftretender Phasen- Verschiebung und BER in der Time- Bin- Konfiguration.

- **QuBER allgemein:**

Die QuBER in der Quantenkryptografie ist allgemein definiert durch:

$$QuBER = \frac{N_{WRONG}}{N_{RIGHT} + N_{WRONG}}$$

Dabei ist „N“ die Anzahl richtig oder falsch detektierter Bits. Aus dieser Tatsache heraus ist der Wertebereich von QuBER festgelegt:

$$0 \leq QuBER \leq 1$$

Im nächsten Schritt wird die QuBER in dessen Anteile, welche einfließen in die Berechnung, aufgespalten:

$$QuBER = \frac{R_{ERROR}}{R_{SIFT} + R_{ERROR}}$$

Dabei ist „R<sub>Sift</sub>“ der ausgesiebte Schlüssel - die Bit- Sequenz aus dem Rohschlüssel abzüglich der nicht vom Empfänger (Bob) empfangenen Bits und derer mit unterschiedlicher Basis. Im Allgemeinen gilt:

$$R_{SIFT} \gg R_{ERROR}$$

⇒

$$QuBER \approx \frac{R_{ERROR}}{R_{SIFT}}$$

Der Anteil „R<sub>ERROR</sub>“ wiederum kann aufgeteilt werden in Unteranteile:

$$QuBER = \frac{R_{OPT} + R_{DET} + R_{ACC}}{R_{SIFT}}$$

- **Anteil „ $R_{SIFT}$ “:**

Ist definiert durch:

$$R_{SIFT} = \frac{1}{2} \cdot R_{RAW}$$

⇒

$$R_{SIFT} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot f_{rep} \cdot \mu \cdot t_{link} \cdot \eta$$

Mit:

- q = Korrekturfaktor mit Werten von „1“ oder „1/2“
- $f_{rep}$  = Pulsrate
- $\mu$  = Mittlere Anzahl an Photonen pro Puls
- $t_{link}$  = Die Ankunfts Wahrscheinlichkeit eines Photons am Detektor
- $\eta$  = Die Detektions Wahrscheinlichkeit des Detektors

- **Anteil „ $R_{OPT}$ “:**

Ist definiert durch:

$$R_{OPT} = R_{SIFT} \cdot p_{OPT}$$

Mit:

- $p_{OPT}$  = Wahrscheinlichkeit, das ein Photon den Weg zum falschen Detektor nimmt.

- **Anteil „ $R_{DET}$ “:**

Ist definiert durch:

$$R_{DET} = \frac{1}{4} \cdot f_{rep} \cdot p_{dark} \cdot n$$

Mit:

- $p_{dark}$  = Wahrscheinlichkeit der Detektion eines Dark- Counts pro Zeitfenster und pro Detektor
- n = Anzahl der Detektoren

- **Anteil „ $R_{ACC}$ “:**

Ist definiert durch:

$$R_{ACC} = \frac{1}{4} \cdot p_{ACC} \cdot f_{rep} \cdot t_{link} \cdot n \cdot \eta$$

Mit:

- $p_{ACC}$  = Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitfenster ein zweites Photon gefunden wird, obwohl nur das erste erzeugt wurde.

Damit ist QuBER endgültig definiert:

$$QuBER = \frac{R_{OPT}}{R_{SIFT}} + \frac{R_{DET}}{R_{SIFT}} + \frac{R_{ACC}}{R_{SIFT}}$$

⇒

$$QuBER = p_{OPT} + \frac{p_{DARK} \cdot n}{2 \cdot t_{link} \cdot \eta \cdot q \cdot \mu} + \frac{P_{ACC}}{2 \cdot q \cdot \mu}$$

Sämtliche Wahrscheinlichkeiten sind mit großer Sicherheit temperaturabhängig. Jedoch ist diese Abhängigkeit unbekannt. Ziel dieses Arbeitsblattes ist es, die thermische Gesamtabhängigkeit von QuBER zu approximieren.

## Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen Temperaturschwankungen und QuBER in der Time- Bin- Konfiguration.

- Annahme einer Temperaturabhängigkeit -

- **Annahme einer Temperaturabhängigkeit:**

In phasenkodierten Aufbauten ist die „QuBER<sub>OPT</sub>“ abhängig von der bekannten Visibilität „V“:

$$QuBER_{OPT} = \frac{1-V}{2} \equiv Q$$

Für „V“ ist eine Temperaturabhängigkeit definierbar:

$$Q = \frac{1-V_0 \cdot \left(1 - \frac{d}{dT} V \cdot |\Delta T|\right)}{2}$$

Dabei ist „ΔT“ die Temperaturdifferenz von der Solltemperatur und „dV/dT“ die Temperaturabhängigkeit der Visibilität. Um die nun vorliegende Differentialgleichung lösen zu können, werden die Variablen getrennt und anschließend mit einem unbestimmten Integral beaufschlagt:

$$\frac{1-2Q}{V_0} = 1 - \frac{d}{dT} V \cdot |\Delta T|$$

⇒

$$\frac{V_0 - 1 + 2Q}{V_0} = \frac{d}{dT} V \cdot |\Delta T|$$

⇒

$$\int dT = |\Delta T| \cdot \int \frac{V_0}{V_0 - 1 + 2Q} \cdot dV$$

Die Lösung der Integrale erfordert die Einführung einer Integrationskonstante „C“. Dessen Größe ist noch unbekannt:

$$T + C = |\Delta T| \cdot [V_0 + \ln(V_0 - 1 + 2Q) - 2Q \cdot \ln(V_0 - 1 + 2Q)]$$

⇒

$$\frac{T + C}{|\Delta T|} = V_0 + (1 - 2Q) \cdot \ln(V_0 - 1 + 2Q)$$

Das Ergebnis ist eine transzendente Gleichung, die so nicht analytisch zu lösen wäre. Jedoch ist für den Klammerausdruck „1-2Q“ ein Substitut bekannt:

$$1 - 2Q = V_0$$

⇒

$$\frac{T + C}{|\Delta T|} = V_0 + V_0 \cdot \ln(V_0 - 1 + 2Q)$$

Der linke Term ist eine modifizierte Heaviside- Funktion. Dessen genauer Ausdruck ist infolge der unbekanntenen Werte von „T“, „C“ und „ΔT“ nicht eindeutig darstellbar. Daher wird die Heaviside- Funktion durch die Signum- Funktion ersetzt und mit einer Konstante „K“ verknüpft.

$$\pm K = \pm V_0 \pm V_0 \cdot \ln(V - 1 + 2Q)$$

Im letzten Schritt wird Q isoliert. Ergebnis ist die nun temperaturabhängige QuBER (versteckt in „V“):

$$\pm \frac{K}{V_0} = 1 \pm \ln(V_0 - 1 + 2Q)$$

⇒

$$\pm e^{\pm \frac{K}{V_0} - 1} = V_0 - 1 + 2Q(V)$$

⇒

$$\pm \frac{1}{2} e^{\pm \frac{K}{V_0} - 1} + \frac{1 - V_0}{2} = Q(V)$$

⇒

$$\boxed{\pm \frac{1}{2} e^{\pm \frac{K}{V_0} - 1} + q_{opt} = Q(V)}$$

## Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen Temperaturschwankungen und QuBER in der Time- Bin- Konfiguration.

- Randwertproblem -

Um aus der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung für die temperaturabhängige QuBER eine partikuläre Lösung heraus zu filtern, müssen Randwerte definiert werden. Dabei sind zwei bekannt, ein Satz idealer und ein realer Werte:

- **Ideales Randwertproblem:**

$$\pm \frac{1}{2} e^{\pm \frac{K}{V}-1} + q_{OPT} = Q(V)$$

Randwert „1“:

$$V = 0 \quad Q = \frac{1}{2}$$

⇒

$$\pm \frac{1}{2} e^{-\infty} + q_{OPT} = \frac{1}{2}$$

⇒

$$q_{OPT} = \frac{1}{2}$$

Randwert „2“:

$$V = \frac{1}{2} \quad Q = 0$$

⇒

$$\pm \frac{1}{2} e^{-\frac{K}{1/2}-1} + \frac{1}{2} = 0$$

⇒

$$-e^{-2K-1} + 1 = 0$$

⇒

$$-2K - 1 = 0$$

⇒

$$K = -\frac{1}{2}$$

Ideale partikuläre Lösung:

$$\frac{1}{2} \cdot \left( 1 - e^{\frac{2V-1}{2V}} \right) = Q$$



⇒

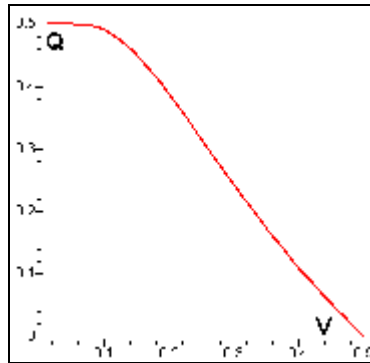


Abbildung 1: Die QuBER in Abhängigkeit von der Visibilität "V" grafisch dargestellt.

### • Reales Randwertproblem:

Aus „Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen auftretender Phasen- Verschiebung und BER in der Time- Bin- Konfiguration.“ ist ein Satz realer Randwerte bekannt:

Randwert „1“:

$$V = 0 \quad Q = 0,131741332$$

⇒

$$\pm \frac{1}{2} e^{-\infty} + q_{OPT} = 0,131741332$$

⇒

$$q_{OPT} = 0,131741332$$

Randwert „2“:

$$V = \frac{1}{2} \quad Q = 0$$

⇒

$$\pm \frac{1}{2} e^{-\frac{K}{\sqrt{2}} - 1} + 0,131741332 = 0$$

⇒

$$- e^{-\frac{K}{\sqrt{2}} - 1} + 0,263482664 = 0$$

⇒

$$-2K - 1 = -1,333767704$$

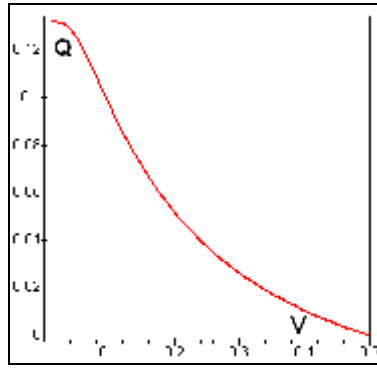
⇒

$$K = 0,1668838520$$

Reale partikuläre Lösung:

$$0,131741332 - \frac{1}{2} e^{-\frac{0,166883852+V}{V}} = Q$$

⇒



Abbild 2: Die QuBER in Abhängigkeit von der Visibilität "V" grafisch dargestellt.

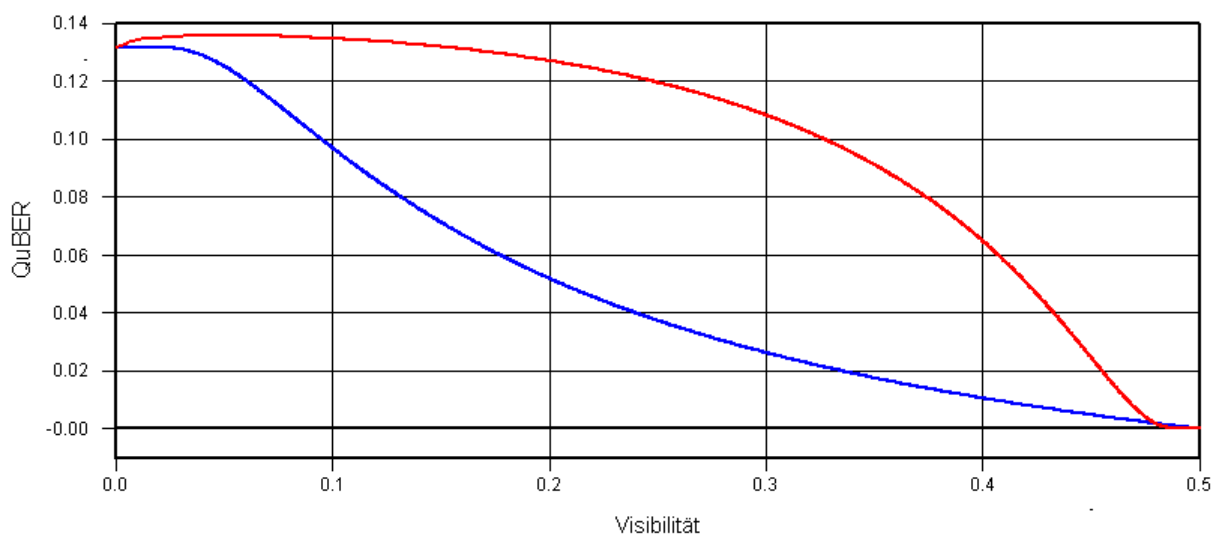
## Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen Temperaturschwankungen und QuBER in der Time- Bin- Konfiguration.

- Tabelle 1-

1) Werte entnommen aus: „Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen auftretender Phasen- Verschiebung und BER in der Time- Bin- Konfiguration.“

V	QuBER <sub>Real</sub>	BER <sup>1)</sup>
0,000	0,131 741 332	0,131 741 332
0,010	0,131 741 322	0,134 316 673
0,020	0,131 697 596	0,135 047 495
0,030	0,131 035 365	0,135 446 925
0,040	0,128 905 000	0,135 658 411
0,050	0,125 207 909	0,135 736 611
0,060	0,120 345 923	0,135 708 636
0,070	0,114 786 500	0,135 589 693
0,080	0,108 900 269	0,135 388 812
0,090	0,102 942 263	0,135 111 402
0,100	0,097 074 978	0,134 760 535
0,110	0,091 395 739	0,134 338 658
0,120	0,085 958 493	0,133 843 010
0,130	0,080 789 223	0,133 275 868
0,140	0,075 896 299	0,132 634 702
0,150	0,071 277 275	0,131 917 270
0,160	0,066 923 288	0,131 120 673
0,170	0,062 821 886	0,130 241 363
0,180	0,058 958 829	0,129 275 161
0,190	0,055 319 223	0,128 217 234
0,200	0,051 888 221	0,127 062 059
0,210	0,048 651 437	0,125 803 383
0,220	0,045 595 194	0,124 434 161
0,230	0,042 706 636	0,122 946 812
0,240	0,039 973 785	0,121 331 473
0,250	0,037 385 537	0,119 579 212
0,260	0,034 931 638	0,117 678 581
0,270	0,032 602 644	0,115 617 141
0,280	0,030 389 866	0,113 380 953
0,290	0,028 285 318	0,110 954 399
0,300	0,026 281 663	0,108 319 954
0,310	0,024 372 161	0,105 457 946
0,320	0,022 550 614	0,102 346 278

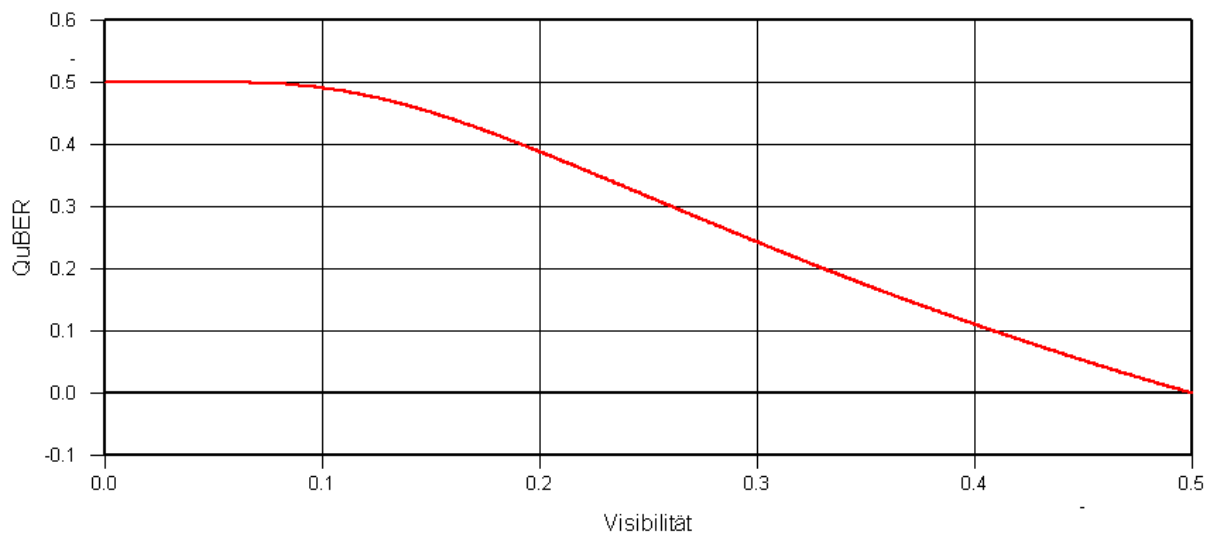
0,330	0,020 811 323	0,098 960 131
0,340	0,019 149 042	0,095 271 616
0,350	0,019 149 042	0,091 249 617
0,360	0,016 036 564	0,086 859 226
0,370	0,014 577 801	0,082 061 904
0,380	0,013 178 854	0,076 815 480
0,390	0,011 836 209	0,071 074 870
<b>0,400</b>	<b>0,010 546 617</b>	0,064 793 867
0,410	0,009 307 062	0,057 929 012
0,420	0,008 114 749	0,050 447 520
0,430	0,006 967 080	0,042 343 107
0,440	0,005 861 641	0,033 667 530
0,450	0,004 796 183	0,024 593 555
<b>0,460</b>	0,003 768 612	<b>0,015 539 378</b>
0,470	0,002 776 974	0,007 394 706
0,480	0,001 819 444	0,001 760 697
0,490	0,000 894 318	0,000 028 149
0,491	0,000 803 525	0,000 011 422
0,492	0,000 713 039	0,000 003 719
0,493	0,000 622 858	0,000 000 885
0,494	0,000 532 980	0,000 000 132
0,495	0,000 443 404	0,000 000 009
0,496	0,000 354 128	0,000 000 000
0,497	0,000 265 151	0,000 000 000
0,498	0,000 176 472	0,000 000 000
0,499	0,000 088 088	0,000 000 000
0,500	0,000 000 001	0,000 000 000



Abbild 3: Die **QuBER<sub>REAL</sub>** im Vergleich zur **BER<sup>1)</sup>** in Abhängigkeit von der Visibilität "V".

V	QuBER <sub>Ideal</sub>
0,000	0,500 000 000
0,010	0,500 000 000
0,020	0,500 000 000
0,030	0,499 999 922
0,040	0,499 994 935
0,050	0,499 938 295
0,060	0,499 673 304
0,070	0,498 925 612
0,080	0,497 376 241
0,090	0,494 745 670
0,100	0,490 842 181
0,110	0,485 572 248
0,120	0,478 928 078
0,130	0,470 966 386
0,140	0,461 786 856
0,150	0,451 514 016
0,160	0,440 283 516
0,170	0,428 232 507
0,180	0,415 493 342
0,190	0,402 189 772
0,200	0,388 434 920
0,210	0,374 330 466
0,220	0,359 966 620
0,230	0,345 422 583
0,240	0,330 767 288
0,250	0,316 060 279
0,260	0,301 352 643
0,270	0,286 687 922
0,280	0,272 102 991
0,290	0,257 628 865
0,300	0,243 291 440
0,310	0,229 112 157
0,320	0,215 108 588
0,330	0,201 294 964
0,340	0,187 682 636
0,350	0,174 280 471
0,360	0,161 095 211
0,370	0,148 131 774
0,380	0,135 393 524
0,390	0,122 882 498

0,400	0,110 599 608
0,410	0,098 544 817
0,420	0,086 717 281
0,430	0,075 115 486
0,440	0,063 737 354
0,450	0,052 580 342
0,460	0,041 641 524
0,470	0,030 917 663
0,480	0,020 405 271
0,490	0,010 100 663
0,491	0,009 081 484
0,492	0,008 064 340
0,493	0,007 049 228
0,494	0,006 036 144
0,495	0,005 025 083
0,496	0,004 016 043
0,497	0,003 009 018
0,498	0,002 004 005
0,499	0,001 001 001
0,500	0,000 000 000



Abbild 4: Die QuBER<sub>Opt</sub> in Abhängigkeit von der Visibilität "V" grafisch dargestellt.

## Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen Temperaturschwankungen und QuBER in der Time- Bin- Konfiguration.

- Tabelle 2 -

Aus „Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen Visibilität und BER in der Time- Bin- Konfiguration.“ ist eine direkte Abhängigkeit der Visibilität von einer möglichen Temperaturdifferenz vom Soll bekannt.

$$V = \frac{\cos^2 \Delta\varphi(\Delta T)}{1 + \cos^2 \Delta\varphi(\Delta T)}$$

Mit:

$$\Delta\varphi(\Delta T) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \cdot \left( 1 + \frac{dn}{dT} \Delta T \right) \cdot \Delta L \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

In

$$0,131741332 - \frac{1}{2} e^{\frac{0,166883852 + V}{V}} = Q$$

eingesetzt, ist nun die Temperaturabhängigkeit von QuBER direkt ermittelbar.

Beispielswerte:

n	=	1,5	
$\lambda$	=	1,5	[ $\mu\text{m}$ ]
$\Delta L$	=	0,1	[ m ]
$\alpha$	=	$12 \cdot 10^{-6}$	[ 1/K ]
$dn/dT$	=	$30 \cdot 10^{-6}$	[ 1/K ]

Grafisch dargestellt:

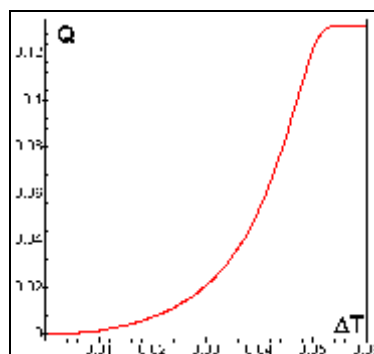


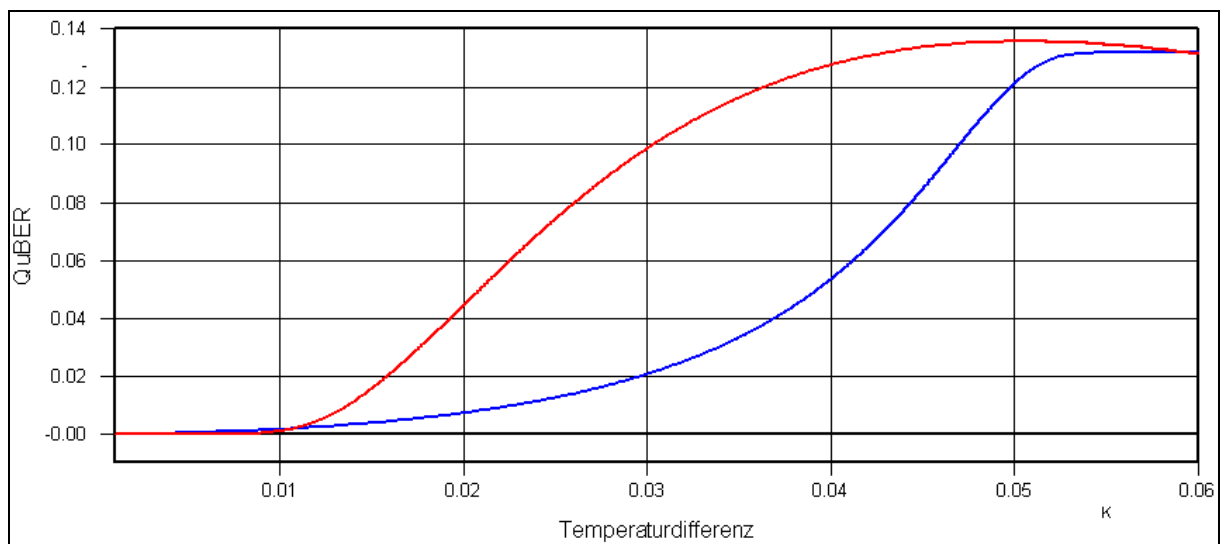
Abbildung 5: Die QuBER in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz "ΔT" grafisch dargestellt.

1) Werte entnommen aus: „Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen auftretender Phasen- Verschiebung und BER in der Time- Bin- Konfiguration.“

$\Delta T$ [K]	QuBER <sub>Real</sub>	BER <sup>1)</sup>	$t_{\phi}$ [s]
0,001	0,000 015 425	0,000 000 000	0,77
0,002	0,000 065 830	0,000 000 000	1,54
0,003	0,000 138 701	0,000 000 000	2,31
0,004	0,000 247 157	0,000 000 000	3,08
0,005	0,000 386 894	0,000 000 001	3,84
0,006	0,000 559 667	0,000 000 245	4,61
0,007	0,000 765 871	0,000 007 347	5,38
0,008	0,001 006 548	0,000 068 539	6,15
0,009	0,001 282 926	0,000 322 921	6,92
0,010	0,001 596 435	0,000 992 911	7,69
0,011	0,001 948 720	0,002 305 776	8,46
0,012	0,002 341 658	0,004 417 240	9,23
0,013	0,002 777 379	0,007 382 282	10,0
<b>0,014</b>	0,003 258 287	<b>0,011 166 519</b>	<b>10,8</b>
0,015	0,003 784 994	0,015 674 746	11,5
0,016	0,004 364 535	0,020 779 703	12,3
0,017	0,004 998 108	0,026 344 029	13,1
0,018	0,005 690 426	0,032 234 449	13,8
0,019	0,006 444 858	0,038 329 674	14,6
0,020	0,007 266 478	0,044 523 957	15,4
0,021	0,008 160 624	0,050 727 947	16,1
0,022	0,009 133 268	0,056 868 013	16,9
0,023	0,010 191 088	0,062 884 798	17,7
<b>0,024</b>	<b>0,011 337 018</b>	0,068 731 471	<b>18,5</b>
0,025	0,012 588 115	0,074 371 942	19,2
0,026	0,013 949 576	0,079 779 181	20,0
0,027	0,015 431 906	0,084 933 705	20,8
0,028	0,017 046 877	0,089 822 247	21,6
0,029	0,018 807 689	0,094 436 630	22,3
0,030	0,020 729 134	0,098 772 796	23,1
0,031	0,022 827 776	0,102 829 998	23,8
0,032	0,025 122 140	0,106 610 132	24,6
0,033	0,027 622 950	0,110 117 173	25,4
0,034	0,030 372 133	0,113 356 718	26,1
0,035	0,033 386 028	0,116 335 600	26,9
0,036	0,036 692 556	0,119 061 585	27,7
0,037	0,040 322 044	0,121 543 114	28,4
0,038	0,044 306 909	0,123 789 093	29,2



0,039	0,048 680 953	0,125 808 732	30,0
0,040	0,053 478 085	0,127 611 402	30,8
0,041	0,058 730 114	0,129 206 531	31,5
0,042	0,064 463 189	0,130 603 515	32,3
0,043	0,070 667 671	0,131 811 649	33,1
0,044	0,077 385 995	0,132 840 072	33,8
0,045	0,084 558 771	0,133 697 730	34,6
0,046	0,092 100 069	0,134 393 338	35,4
0,047	0,099 852 675	0,134 935 360	36,1
0,048	0,107 563 581	0,135 331 992	36,9
0,049	0,114 865 790	0,135 591 149	37,7
0,050	0,121 287 212	0,135 720 462	38,4
0,051	0,126 323 966	0,135 727 270	39,2
0,052	0,129 609 726	0,135 618 624	40,0
0,053	0,131 214 968	0,135 401 284	40,8
0,054	0,131 684 515	0,135 081 731	41,5
0,055	0,131 740 138	0,134 666 163	42,3
0,056	0,131 741 331	0,134 160 505	43,1
0,057	0,131 741 332	0,133 570 421	43,8
0,058	0,131 741 332	0,132 901 312	44,6
0,059	0,131 741 332	0,132 158 333	45,4
0,060	0,131 741 332	0,131 346 399	46,1



Abbild 6: Die **QuBER<sub>REAL</sub>** im Vergleich zur **BER<sup>1)</sup>** in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz "ΔT".

## Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen Temperaturschwankungen und QuBER in der Time- Bin- Konfiguration.

- Abschätzung Übereinstimmung QuBER zu BER, Zusammenfassung -

Zwecks Abschätzung der Übereinstimmung der ermittelten Werte wird der Quotient zwischen **BER** (ermittelt mittels Entscheidungsschwelle) und **QuBER<sub>Real</sub>** (ermittelt über Wahrscheinlichkeiten) ermittelt und grafisch dargestellt in Abhängigkeit von der Visibilität und der Temperaturdifferenz.

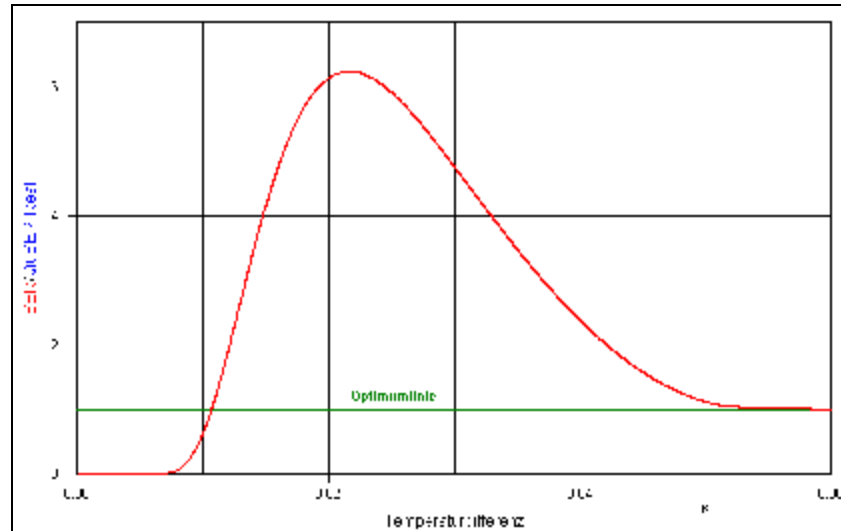


Abbildung 7: Der **BER/QuBER<sub>REAL</sub>**- Quotient in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz "ΔT".  
Ein Wert von **Eins** bezeichnet die Übereinstimmung beider Modelle.

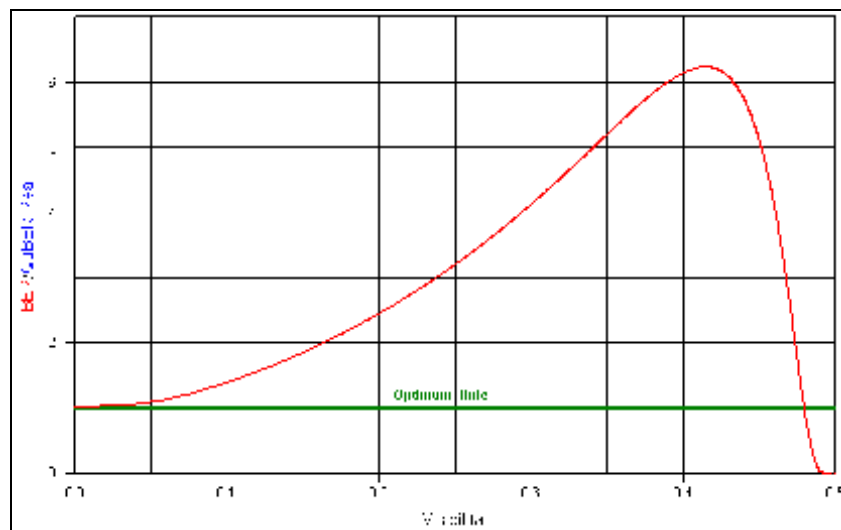


Abbildung 7: Der **BER/QuBER<sub>REAL</sub>**- Quotient in Abhängigkeit von der Visibilität "V".  
Ein Wert von **Eins** bezeichnet die Übereinstimmung beider Modelle.

Zum Schluss eine Übersicht zum Vergleich der Werte an der 10%- Fehlergrenze:

Fehler	bei ΔT	bei V	im Stabilitätsfenster von
<b>BER</b> ≈ 0,01	0,014[K]	0,465	10,8[s]
<b>QuBER<sub>Real</sub></b> ≈ 0,01	0,024K]	0,400	18,5[s]

Mit den oben angegebenen Beispielswerten und einem  $V_{\text{Max}}$  von 0,500 ergibt sich dennoch eine gute Übereinstimmung beider Modelle.