
Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie

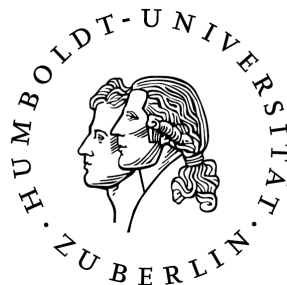
- Gehäuse, Phasenstabilisierung, Fasereinbau -

Masterarbeit
im Studiengang Elektrotechnik und
Informationstechnik
Vertiefungsrichtung Photonik

an der



in Kooperation mit der



vorgelegt von

Björnstjerne Zindler

geboren am 13. November 1966 in Görlitz

eingereicht am 21. November 2011

Erstgutachter: Herr Professor Dr. A. Richter
Zweitgutachter: Herr Professor Dr. O. Benson

Meiner Mutter gewidmet

*03. Juli 1940

+22. September 2010

Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen auftretender Phasenverschiebung und BER in der Time- Bin- Konfiguration.

- Phasenrauschen, Phasenkodierung -

- **Basierend auf:**

Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie - Gehäuse, Phasenstabilisierung, Fasereinbau - A.3 - Herleitungen §5.

- **Phasenrauschen:**

Bekannt sind die Berechnungsgrundlagen der Phasenlage „ φ “ und der gemessenen optischen Leistung am Detektor „ P “ für den mittleren Peak der Time- Bin-Konfiguration:

$$P = 4 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad P = 4 \cdot \cos^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot n \cdot \Delta L \right]$$

⇒

$$\Delta\varphi(\Delta T) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \cdot \left(1 + \frac{dn}{dT} \Delta T \right) \cdot \Delta L \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

| | | |
|------|------------|---|
| Mit: | λ | Genutzte Wellenlänge |
| | n | Kernbrechzahl der genutzten Faser |
| | dn/dT | Temperaturabhängigkeit von „ n “ |
| | ΔT | Temperaturabweichung vom Sollwert |
| | ΔL | Weglängenunterschied zwischen den Interferometerarmen |
| | α | Wärmelängenänderungskoeffizient der Faser |

Letzterer Ausdruck beschreibt das Phasenrauschen infolge Temperaturabweichung vom Sollwert. Es sei darauf hingewiesen, dass weitere Gründe für das Auftreten von Phasenrauschen möglich sind. Diese werden jedoch hier nicht weiter betrachtet.

• **Phasenkodierung nach dem BB84- Protokoll:**

Die Phasenkodierung wird dargestellt durch die Tabelle 2 aus oben angegebener Quelle:

| Alice | | Bob | | APD | | Alice+Bob |
|--------|----------|------------|----------|--------------|----------|-------------|
| sendet | mit | stellt ein | erwartet | misst | Raw- Key | Sifted- Key |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | $\pi/2$ | 0 | $-\pi/2$ | ? | |
| 1 | 0 | π | 1 | $-\pi$ | 0 | |
| 1 | 0 | $3\pi/2$ | 0 | $-3\pi/2$ | ? | |
| 0 | $\pi/2$ | 0 | 1 | $\pi/2$ | ? | |
| 0 | $\pi/2$ | $\pi/2$ | 0 | 0 | 1 | |
| 0 | $\pi/2$ | π | 1 | $-\pi/2$ | ? | |
| 0 | $\pi/2$ | $3\pi/2$ | 0 | $-\pi$ | 0 | 0 |
| 1 | π | 0 | 1 | π | 0 | |
| 1 | π | $\pi/2$ | 0 | $\pi/2$ | ? | |
| 1 | π | π | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | π | $3\pi/2$ | 0 | $-\pi/2$ | ? | |
| 0 | $3\pi/2$ | 0 | 1 | $3\pi/2$ | ? | |
| 0 | $3\pi/2$ | $\pi/2$ | 0 | π | 0 | 0 |
| 0 | $3\pi/2$ | π | 1 | $\pi/2$ | ? | |
| 0 | $3\pi/2$ | $3\pi/2$ | 0 | 0 | 1 | |
| QuBit | ϕ_A | ϕ_B | QuBit | $\Delta\phi$ | QuBit | QuBit |

Tabelle 2: Implementierung des BB84- Protokolls mittels Phasen- Kodierung. [NG01] [Rie10]

Alice stellt für jedes zu übertragende QuBit eine streng definierte Phase ein (0π , $\pi/2$, π , $3\pi/2$). Bob wird jedoch gausverteilt um diese Phasen kleinere Abweichungen messen. Diese Linienverbreiterung soll hier ausschließlich auf das oben definierte Phasenrauschen begründet werden. Grafisch könnte sich dies darstellen:

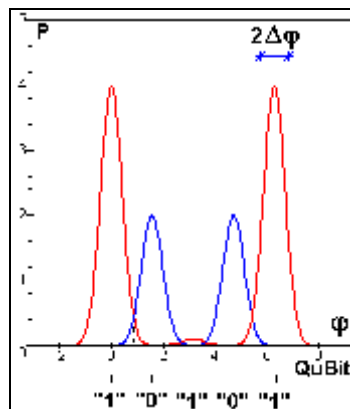


Abbildung 1: Linienverbreiterung infolge Phasenrauschen bei der Phasenkodierung nach dem BB84- Protokoll. **Schwarz gestrichelt**, die Entscheidungsschwelle zwischen QuBit „1“ und „0“.

Die Entscheidungsschwelle bestimmt den Fehler 1. Ordnung.

„Wird ein Qubit „1“ gesendet und liegt dieses oberhalb der Entscheidungsschwelle des Detektors am Detektor an, wird dieser das Qubit als „0“ interpretieren.“

„Wird ein Qubit „1“ gesendet und liegt dieses unterhalb der Entscheidungsschwelle des Detektors am Detektor an, wird dieser das Qubit als „1“ interpretieren.“

Die Lage der Entscheidungsschwelle ist maßgeblich für die Ermittlung der BER.

Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen auftretender Phasen- Verschiebung und BER in der Time- Bin- Konfiguration.

- Entscheidungsschwelle, Fehlerintegrale, BER -

- **Die Entscheidungsschwelle des Detektors:**

Nur eine Entscheidungsschwelle, angedeutet wie im Abbild 1, wird hier weiter betrachtet. Die QuBits sind definiert als:

$$QuBIT-"1" = \frac{4}{\Delta\varphi \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\Delta\varphi}\right)^2} \quad QuBIT-"0" = \frac{2}{\Delta\varphi \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot\varphi-\pi}{2\cdot\Delta\varphi}\right)^2}$$

Die Entscheidungsschwelle ist jener Punkt, wo beide QuBITS gleiche Intensitäten besitzen:

$$QuBIT-"1" = QuBIT-"0"$$

⇒

$$2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\Delta\varphi}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot\varphi-\pi}{2\cdot\Delta\varphi}\right)^2}$$

⇒

$$\varphi_E = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 4}{\pi} \cdot \Delta\varphi^2$$

- **Berechnung der Fehlerintegrale:**

Die Fehlerintegrale können bestimmt werden mittels der jetzt bekannten Entscheidungsschwelle. Dabei ist TRUE das Fehlerintegral für den Fall eines fehlerfrei detektierten QuBITS und FALSE für einen Fehler 1. Ordnung.

$$TRUE = \int_{-\infty}^{\varphi_E} QuBIT-"1" \quad FALSE = \int_{\varphi_E}^{+\infty} QuBIT-"1"$$

⇒

$$TRUE = \int_{-\infty}^{\varphi_E} \frac{4}{\Delta\varphi \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\Delta\varphi}\right)^2} d\varphi \quad FALSE = \int_{\varphi_E}^{+\infty} \frac{4}{\Delta\varphi \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\Delta\varphi}\right)^2} d\varphi$$

Mit dem QuBIT „0“ ist eine weitere Berechnung ebenfalls möglich. Zum Ende muss die gleiche Berechnungsgrundlage für die BER zum Ausdruck kommen.

$$TRUE = 2 + 2 \cdot \operatorname{erf} \frac{\varphi_E}{\sqrt{2} \cdot \Delta\varphi}$$

$$FALSE = 2 - 2 \cdot \operatorname{erf} \frac{\varphi_E}{\sqrt{2} \cdot \Delta\varphi}$$

Beide Fehlerintegrale unterscheiden sich nur durch das unterschiedliche Vorzeichen.

- **Die Berechnung der BER:**

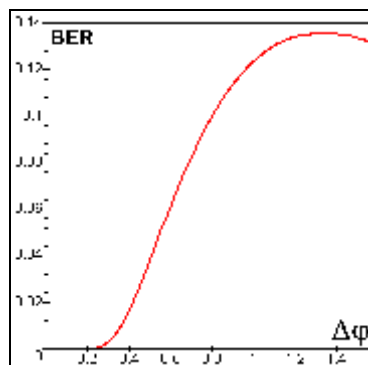
Die BER wird definiert aus den Fehlerintegralen TRUE und FALSE:

$$BER = \frac{FALSE}{TRUE}$$

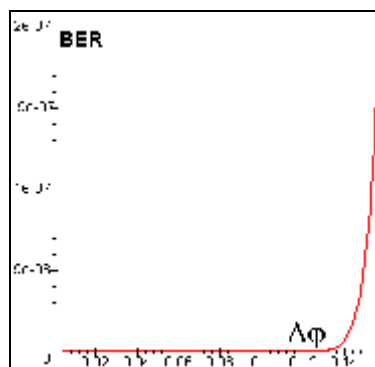
⇒

$$BER = \frac{1 - \operatorname{erf} \frac{\varphi_E}{\sqrt{2} \cdot \Delta\varphi}}{1 + \operatorname{erf} \frac{\varphi_E}{\sqrt{2} \cdot \Delta\varphi}}$$

Damit ist die BER definiert und wird grafisch dargestellt:



Abbild 2: Die Entwicklung der BER in Abhängigkeit von „ $\Delta\varphi$ “ für große „ $\Delta\varphi$ “.



Abbild 2: Die Entwicklung der BER in Abhängigkeit von „ $\Delta\varphi$ “ für kleine „ $\Delta\varphi$ “.

Untersuchung der Abhängigkeiten zwischen auftretender Phasenverschiebung und BER in der Time- Bin- Konfiguration.

- Beispiel -

- **Beispiel:**

Ein Beispiel mit folgenden Werten, entnommen „Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie - Gehäuse, Phasenstabilisierung, Fasereinbau - A.3 - Herleitungen §5.“.

$$\begin{aligned}
 n &= 1,5 \\
 \lambda &= 1,5 \quad [\mu\text{m}] \\
 \Delta L &= 0,1 \quad [\text{m}] \\
 \alpha &= 12 \cdot 10^{-6} \quad [1/\text{K}] \\
 \text{dn/dT} &= 30 \cdot 10^{-6} \quad [1/\text{K}]
 \end{aligned}$$

| ΔT [K] | $\Delta\varphi$ | φ_E | BER | t_φ [s] |
|----------------|-----------------|------------------------|---------------|-----------------|
| 0,001 | $0,0084\pi$ | $\pi/4 + 0,0000978\pi$ | 0,000 000 000 | 0,77 |
| 0,002 | $0,0168\pi$ | $\pi/4 + 0,0003927\pi$ | 0,000 000 000 | 1,54 |
| 0,003 | $0,0252\pi$ | $\pi/4 + 0,0008804\pi$ | 0,000 000 000 | 2,31 |
| 0,004 | $0,0336\pi$ | $\pi/4 + 0,0015651\pi$ | 0,000 000 000 | 3,08 |
| 0,005 | $0,0420\pi$ | $\pi/4 + 0,0024454\pi$ | 0,000 000 001 | 3,84 |
| 0,006 | $0,0504\pi$ | $\pi/4 + 0,0035214\pi$ | 0,000 000 245 | 4,61 |
| 0,007 | $0,0588\pi$ | $\pi/4 + 0,0047930\pi$ | 0,000 007 347 | 5,38 |
| 0,008 | $0,0672\pi$ | $\pi/4 + 0,0062603\pi$ | 0,000 068 539 | 6,15 |
| 0,009 | $0,0756\pi$ | $\pi/4 + 0,0079232\pi$ | 0,000 322 921 | 6,92 |
| 0,010 | $0,0840\pi$ | $\pi/4 + 0,0097816\pi$ | 0,000 992 911 | 7,69 |
| 0,011 | $0,0924\pi$ | $\pi/4 + 0,0118358\pi$ | 0,002 305 776 | 8,46 |
| 0,012 | $0,1008\pi$ | $\pi/4 + 0,0101606\pi$ | 0,004 417 240 | 9,23 |
| 0,013 | $0,1092\pi$ | $\pi/4 + 0,0119246\pi$ | 0,007 382 282 | 10,0 |
| 0,014 | $0,1176\pi$ | $\pi/4 + 0,0191721\pi$ | 0,011 166 519 | 10,8 |
| 0,015 | $0,1260\pi$ | $\pi/4 + 0,0220088\pi$ | 0,015 674 746 | 11,5 |
| 0,016 | $0,1344\pi$ | $\pi/4 + 0,0250411\pi$ | 0,020 779 703 | 12,3 |
| 0,017 | $0,1428\pi$ | $\pi/4 + 0,0282691\pi$ | 0,026 344 029 | 13,1 |
| 0,018 | $0,1512\pi$ | $\pi/4 + 0,0316927\pi$ | 0,032 234 449 | 13,8 |
| 0,019 | $0,1596\pi$ | $\pi/4 + 0,0353119\pi$ | 0,038 329 674 | 14,6 |
| 0,020 | $0,1680\pi$ | $\pi/4 + 0,0391268\pi$ | 0,044 523 957 | 15,4 |
| 0,021 | $0,1764\pi$ | $\pi/4 + 0,0431373\pi$ | 0,050 727 947 | 16,1 |
| 0,022 | $0,1848\pi$ | $\pi/4 + 0,0473434\pi$ | 0,056 868 013 | 16,9 |
| 0,023 | $0,1932\pi$ | $\pi/4 + 0,0517452\pi$ | 0,062 884 798 | 17,7 |

| | | | | |
|-------|--------------|------------------------|---------------|------|
| 0,024 | 0,2016 π | $\pi/4 + 0,0563426\pi$ | 0,068 731 471 | 18,5 |
| 0,025 | 0,2100 π | $\pi/4 + 0,0611356\pi$ | 0,074 371 942 | 19,2 |
| 0,026 | 0,2184 π | $\pi/4 + 0,0661242\pi$ | 0,079 779 181 | 20,0 |
| 0,027 | 0,2268 π | $\pi/4 + 0,0713085\pi$ | 0,084 933 705 | 20,8 |
| 0,028 | 0,2352 π | $\pi/4 + 0,0898222\pi$ | 0,089 822 247 | 21,6 |
| 0,029 | 0,2436 π | $\pi/4 + 0,0822640\pi$ | 0,094 436 630 | 22,3 |
| 0,030 | 0,2520 π | $\pi/4 + 0,0880352\pi$ | 0,098 772 796 | 23,1 |
| 0,031 | 0,2604 π | $\pi/4 + 0,0940021\pi$ | 0,102 829 998 | 23,8 |
| 0,032 | 0,2688 π | $\pi/4 + 0,1001645\pi$ | 0,106 610 132 | 24,6 |
| 0,033 | 0,2772 π | $\pi/4 + 0,1065226\pi$ | 0,110 117 173 | 25,4 |
| 0,034 | 0,2856 π | $\pi/4 + 0,1130764\pi$ | 0,113 356 718 | 26,1 |
| 0,035 | 0,2940 π | $\pi/4 + 0,1198257\pi$ | 0,116 335 600 | 26,9 |
| 0,036 | 0,3024 π | $\pi/4 + 0,1267707\pi$ | 0,119 061 585 | 27,7 |
| 0,037 | 0,3108 π | $\pi/4 + 0,1339114\pi$ | 0,121 543 114 | 28,4 |
| 0,038 | 0,3192 π | $\pi/4 + 0,1412476\pi$ | 0,123 789 093 | 29,2 |
| 0,039 | 0,3276 π | $\pi/4 + 0,1487796\pi$ | 0,125 808 732 | 30,0 |
| 0,040 | 0,3360 π | $\pi/4 + 0,1565071\pi$ | 0,127 611 402 | 30,8 |
| 0,041 | 0,3444 π | $\pi/4 + 0,1644303\pi$ | 0,129 206 531 | 31,5 |
| 0,042 | 0,3528 π | $\pi/4 + 0,1725491\pi$ | 0,130 603 515 | 32,3 |
| 0,043 | 0,3612 π | $\pi/4 + 0,1808635\pi$ | 0,131 811 649 | 33,1 |
| 0,044 | 0,3696 π | $\pi/4 + 0,1893758\pi$ | 0,132 840 072 | 33,8 |
| 0,045 | 0,3780 π | $\pi/4 + 0,1980793\pi$ | 0,133 697 730 | 34,6 |
| 0,046 | 0,3864 π | $\pi/4 + 0,2069806\pi$ | 0,134 393 338 | 35,4 |
| 0,047 | 0,3948 π | $\pi/4 + 0,2160776\pi$ | 0,134 935 360 | 36,1 |
| 0,048 | 0,4032 π | $\pi/4 + 0,2253702\pi$ | 0,135 331 992 | 36,9 |
| 0,049 | 0,4116 π | $\pi/4 + 0,2348584\pi$ | 0,135 591 149 | 37,7 |
| 0,050 | 0,4200 π | $\pi/4 + 0,2445423\pi$ | 0,135 720 462 | 38,4 |
| 0,051 | 0,4284 π | $\pi/4 + 0,2544218\pi$ | 0,135 727 270 | 39,2 |
| 0,052 | 0,4368 π | $\pi/4 + 0,2644969\pi$ | 0,135 618 624 | 40,0 |
| 0,053 | 0,4452 π | $\pi/4 + 0,2747677\pi$ | 0,135 401 284 | 40,8 |
| 0,054 | 0,4536 π | $\pi/4 + 0,2852342\pi$ | 0,135 081 731 | 41,5 |
| 0,055 | 0,4620 π | $\pi/4 + 0,2958962\pi$ | 0,134 666 163 | 42,3 |
| 0,056 | 0,4704 π | $\pi/4 + 0,3067539\pi$ | 0,134 160 505 | 43,1 |
| 0,057 | 0,4788 π | $\pi/4 + 0,3178072\pi$ | 0,133 570 421 | 43,8 |
| 0,058 | 0,4872 π | $\pi/4 + 0,3290562\pi$ | 0,132 901 312 | 44,6 |
| 0,059 | 0,4956 π | $\pi/4 + 0,3405007\pi$ | 0,132 158 333 | 45,4 |
| 0,060 | 0,5040 π | $\pi/4 + 0,3521409\pi$ | 0,131 346 399 | 46,1 |
| 0,061 | 0,5124 π | $\pi/4 + 0,3639768\pi$ | 0,130 470 190 | 46,9 |
| 0,062 | 0,5208 π | $\pi/4 + 0,3760083\pi$ | 0,129 534 164 | 47,7 |
| 0,063 | 0,5292 π | $\pi/4 + 0,3882354\pi$ | 0,128 542 565 | 48,4 |

| | | | | |
|-------|-------------|------------------------|---------------|------|
| 0,064 | $0,5376\pi$ | $\pi/4 + 0,4006581\pi$ | 0,127 499 428 | 49,2 |
| 0,065 | $0,5460\pi$ | $\pi/4 + 0,4132765\pi$ | 0,126 408 594 | 50,0 |
| 0,066 | $0,5544\pi$ | $\pi/4 + 0,4260905\pi$ | 0,125 273 711 | 50,7 |
| 0,067 | $0,5628\pi$ | $\pi/4 + 0,4391002\pi$ | 0,124 098 250 | 51,5 |
| 0,068 | $0,5712\pi$ | $\pi/4 + 0,4523055\pi$ | 0,122 885 503 | 52,3 |
| 0,069 | $0,5796\pi$ | $\pi/4 + 0,4657064\pi$ | 0,121 638 601 | 53,1 |
| 0,070 | $0,5880\pi$ | $\pi/4 + 0,4793029\pi$ | 0,120 360 515 | 53,8 |
| 0,071 | $0,5964\pi$ | $\pi/4 + 0,4930951\pi$ | 0,119 054 063 | 54,6 |
| 0,072 | $0,6048\pi$ | $\pi/4 + 0,5070829\pi$ | 0,117 721 921 | 55,4 |
| 0,073 | $0,6132\pi$ | $\pi/4 + 0,5212662\pi$ | 0,116 366 626 | 56,1 |
| 0,074 | $0,6216\pi$ | $\pi/4 + 0,5356455\pi$ | 0,114 990 584 | 56,9 |
| 0,075 | $0,6300\pi$ | $\pi/4 + 0,5502202\pi$ | 0,113 596 075 | 57,7 |
| 0,076 | $0,6384\pi$ | $\pi/4 + 0,5649906\pi$ | 0,112 185 260 | 58,4 |
| 0,077 | $0,6468\pi$ | $\pi/4 + 0,5799566\pi$ | 0,110 760 185 | 59,2 |
| 0,078 | $0,6552\pi$ | $\pi/4 + 0,5951182\pi$ | 0,109 322 789 | 60,0 |
| 0,079 | $0,6636\pi$ | $\pi/4 + 0,6104755\pi$ | 0,107 874 906 | 60,7 |
| 0,080 | $0,6720\pi$ | $\pi/4 + 0,6260284\pi$ | 0,106 418 272 | 61,5 |
| 0,081 | $0,6804\pi$ | $\pi/4 + 0,6417769\pi$ | 0,104 954 528 | 62,3 |
| 0,082 | $0,6888\pi$ | $\pi/4 + 0,6577210\pi$ | 0,103 485 226 | 63,1 |
| 0,083 | $0,6972\pi$ | $\pi/4 + 0,6738608\pi$ | 0,102 011 835 | 63,8 |
| 0,084 | $0,7056\pi$ | $\pi/4 + 0,6901963\pi$ | 0,100 535 738 | 64,6 |
| 0,085 | $0,7140\pi$ | $\pi/4 + 0,7067273\pi$ | 0,099 058 243 | 65,4 |
| 0,086 | $0,7224\pi$ | $\pi/4 + 0,7234540\pi$ | 0,097 580 586 | 66,1 |
| 0,087 | $0,7308\pi$ | $\pi/4 + 0,7403763\pi$ | 0,096 103 931 | 66,9 |
| 0,088 | $0,7392\pi$ | $\pi/4 + 0,7574943\pi$ | 0,094 629 373 | 67,7 |
| 0,089 | $0,7476\pi$ | $\pi/4 + 0,7748079\pi$ | 0,093 157 947 | 68,4 |
| 0,090 | $0,7560\pi$ | $\pi/4 + 0,7923171\pi$ | 0,091 690 624 | 69,2 |
| 0,091 | $0,7644\pi$ | $\pi/4 + 0,8100220\pi$ | 0,090 228 321 | 70,0 |
| 0,092 | $0,7728\pi$ | $\pi/4 + 0,8279225\pi$ | 0,088 771 895 | 70,7 |
| 0,093 | $0,7812\pi$ | $\pi/4 + 0,8460186\pi$ | 0,087 322 155 | 71,5 |
| 0,094 | $0,7896\pi$ | $\pi/4 + 0,8643104\pi$ | 0,085 879 859 | 72,3 |
| 0,095 | $0,7980\pi$ | $\pi/4 + 0,8827977\pi$ | 0,084 445 714 | 73,0 |
| 0,096 | $0,8064\pi$ | $\pi/4 + 0,9014808\pi$ | 0,083 020 387 | 73,8 |
| 0,097 | $0,8148\pi$ | $\pi/4 + 0,9203594\pi$ | 0,081 604 498 | 74,6 |
| 0,098 | $0,8232\pi$ | $\pi/4 + 0,9394338\pi$ | 0,080 198 627 | 75,4 |
| 0,099 | $0,8316\pi$ | $\pi/4 + 0,9587037\pi$ | 0,078 803 315 | 76,1 |
| 0,100 | $0,8400\pi$ | $\pi/4 + 0,9781693\pi$ | 0,077 419 068 | 76,9 |