Bessel, Airy und andere schlaue Köpfe

–

Wie man einen Balken lagert.

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 19. Juni 2015 – Letzte Revision: 31. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Modellbildung **5**
2.1 Der Korrekturfaktor K 5
2.2 Entwicklung des Polynoms ω 6

3 Fallunterscheidungen **7**
3.1 INT-MIN 7
3.2 SUM-MIN 8
3.3 BES I 9
3.4 BES II 10
3.5 AIRY 11
3.6 NORM 12
3.7 DREI 13

4 Anhang **15**
4.1 Zusammenfassung 15
4.2 Darstellungen 16

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Pro] Prof. Dr. rer. nat. habil. Peter Will. OptLager.pdf. Fakultät Medien, Hochschule Mittweida.

☞ Das hier vorliegende Arbeitsblatt ist eher eine akademische Betrachtung als ingenieurtechnische Vorgehensweise. Daher wird an verschiedenen Stellen vom gewohnten Wege aus DINs, ISOs und ENs abgewichen. Die Berechnungsgrundlagen vorhandener Regelwerke werden **nicht** hergeleitet.☜

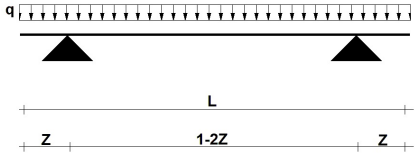
1 Einleitung

Einleitung

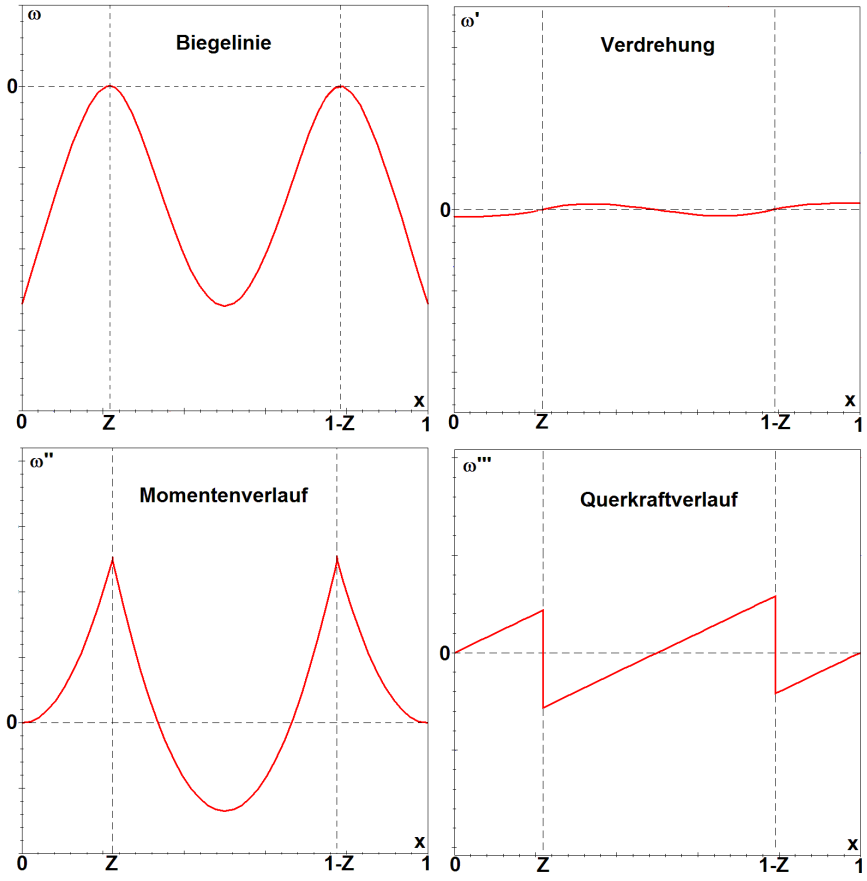
[Pro]

Grundlage dieses Arbeitsblattes ist die Frage: „Wie lagert man einen Balken richtig.“ Wobei das Wort -richtig- dem Laien impliziert, dass der Balken nach einer gewissen Weile immer noch die gleiche Form besitzt, wie sie vor dem Einlagern war - gerade und unverwunden. Wie essentiell diese Frage werden kann, erkennt man, wenn im Baumarkt die Lagerkatastrophen separiert werden zum Entsorgen, ohne je einen richtigen Einsatz erlebt zu haben.

Zum Thema „Optimale Lagerung“ haben sich schon viele (schlaue Köpfe) Gedanken gemacht. So ist das Eigengewicht des Balkens bei langer Lagerung nicht mehr zu vernachlässigen. Es ist außerdem das Kriterium, was zu Verformungen führt. Die Kriterien für eine optimale Lagerung sind vielfältig. Der eine Bauherr möchte so wenig Durchbiegung wie möglich, der andere Technologe eine größtmögliche Freiheit an Verwindung. Aus diesen und anderen Gründen, wird es wohl nie **die** „Optimale Lagerung“ geben. Aber Gedanken kann man sich dennoch machen.



Es liegt ein Balken vor mit angeschlossenen Kragarmen. Betrachtet wird nur das Eigengewicht q. Die Entwicklung der Biegeline und die Bedeutung der Ableitungen soll bekannt sein. Normalkraft (haben wir hier systembedingt nicht), Querkraft und Moment sich wichtige Einwirkungen auf den Balken. Die Ermittlung und Darstellung sind ebenfalls bekannt und durchgeführt.



Letztendlich sieht man bei M und Q an deren Unstetigkeitsstellen Z und $1-Z$, dass die Biegelinie ω sich nicht durch ein einzelnes Polynom darstellen lässt. Nötig sind drei Polynome in den Intervallen $[0; Z]$, $[Z; 1-Z]$ und $[1-Z; 1]$. Wobei $L = 1$ und $q = E \cdot I$ hier gelten soll.[1]

[1] Herleitung nach: „OptLager.pdf“ Prof. Dr. rer. nat. habil. Peter Will, Fakultät Medien, Hochschule Mittweida

- **Intervall** $[0; Z]$

$$\omega_{[0;Z]} \propto x^4 + C_1 \cdot x + C_2$$

- **Intervall** $[Z; 1-Z]$

$$\omega_{[Z;1-Z]} \propto x^4 - 2 \cdot x^3 + 6 \cdot Z \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4$$

- **Intervall** $[1-Z; 1]$

$$\omega_{[1-Z;1]} \propto x^4 - 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + C_5 \cdot x + C_6$$

Mit:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1 - 6 \cdot Z \cdot (1 - Z) \\
C_2 &= 6 \cdot Z^2 \cdot (1 - Z) - Z \cdot \left(1 + Z^3\right) \\
C_3 &= 1 - 6 \cdot Z \\
C_4 &= 6 \cdot Z^2 \cdot (1 - Z) - Z \cdot \left(1 + Z^3\right) + 2 \cdot Z^3 \\
C_5 &= 6 \cdot Z \cdot (1 - Z) - 5 \\
C_6 &= Z^3 \cdot (1 - Z) + 7 \cdot Z^2 \cdot (1 - Z) - 5 \cdot Z \cdot (1 - Z) + 2 \cdot (1 - Z)
\end{aligned}$$

Es ist ein großer Aufwand zu vermuten im Hinblick auf das Arbeitsblattthema. Deshalb wird im nächsten Schritt ein Polynom durch Interpolation entwickelt, welches die Biegelinie in ihren bekannten und fixen Punkten repräsentiert. Dazwischen sind Abweichungen erlaubt. Daher werden die gewonnenen Werte für Z mit den Bedingungen nach Bessel, Airy und Co nicht die „wahren“ Werte sein, sondern die des Ersatzpolynoms. Es geht schließlich hier nur um das Verständnis, was gemacht wird, wenn man z. B. die Bessel- Punkte des Balkens ermittelt. Wer Lust und Laune verspürt für alle folgenden Fallunterscheidungen die exakten Polynome zu nutzen, dem kann ich nur ermutigen.

Drei folgende bekannte Werte für die optimale Lagerung eines Balkens anhand der exakten Polynome zum Vergleich für die folgenden $Z_{INT-MIN}, Z_{SUM-MIN}, Z_{B1}, Z_{B2}, Z_{AIRY}, Z_{NORM}$ und Z_{DREI}.

$$\boldsymbol{\widetilde{Z}_{BES} = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \approx 0,2247\ldots}$$

$$\boldsymbol{\widetilde{Z}_{AIRY} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right) \approx 0,2112\ldots}$$

$$\boldsymbol{\widetilde{Z}_{NORM} \approx 0,2232\ldots}$$

☞Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, das vorliegendes Arbeitsblatt einer rein akademischen Betrachtung entstammt und nicht ein ingenieurtechnisch nutzbares Kalkül darstellt.☜

2 Modellbildung

2.1 Der Korrekturfaktor K

Der Korrekturfaktor K besitzt die Aufgabe, dass die Belastungslinie ω^{IV} den Wert $q = 1$ annimmt. **Modell**

Der Korrekturfaktor [001]

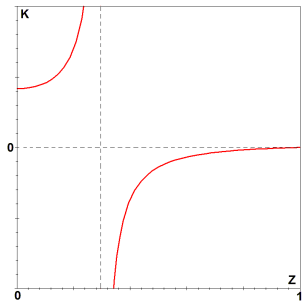
$$K = \frac{1}{24} \cdot \frac{Z - 1}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

ist (aus praktischen Gründen) definiert für ein $0 \leq Z < 0.5$ und besitzt folgende Vorzeichen:

$$K = \begin{cases} (+) & \text{wenn} \quad 0 \leq Z < \frac{1}{16} \cdot \left(\sqrt{33} - 1\right) \approx 0,29653... \\ (-) & \text{wenn} \quad \frac{1}{16} \cdot \left(\sqrt{33} - 1\right) < Z < 0,5 \end{cases}$$

Bei $q = 1$ wird daher für alle folgenden Werte von Z gelten unter Beachtung der erwünschten Randbedingungen:

$$0 \leq Z < \frac{1}{16} \cdot \left(\sqrt{33} - 1\right) \approx 0,29653...$$



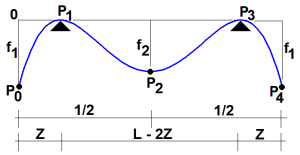
Das als Fall 7 angeführte Beispiel „DREI“ mit $Z = 1/3$ ist daher rein informativ.

2.2 Entwicklung des Polynoms ω

Polynom

Da letztendlich das Auflagerverhältnis x/L berechnet werden soll, wird für die Länge L des Balkens vereinheitlicht $L = 1$ angenommen.

Folgende Punkte für den konstant flächenlastbelasteten Balken (z. B. Eigenlast) sind definiert.



$$P_0\,(0, f_1) \quad P_1\,(Z, 0) \quad P_2\left(\tfrac{1}{2}, f_2\right) \quad P_3\,(1 - Z, 0) \quad P_4\,(1, f_1)$$

Es folgt demnach eine septische Interpolation. Dessen Durchführung wird hier nicht gezeigt[2]. Mit dem Korrekturfaktor K ergibt sich dann eine Biegelinie ω des Balkens von:

$$\omega\,(x, f_1, f_2) = \frac{1}{24} \cdot \frac{(x - 1 + Z) \cdot (Z - x)}{Z \cdot (8 \cdot Z^2 + Z - 1) \cdot (2 \cdot Z - 1)^2} \cdot \begin{pmatrix} +16 \cdot (f_2 - f_1) \cdot Z \cdot (Z - 1) \cdot x^2 \\ -16 \cdot (f_2 - f_1) \cdot Z \cdot (Z - 1) \cdot x \\ +4 \cdot Z \cdot (Z - 1) \cdot f_2 \\ +4 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot f_2 \\ +f_2 \end{pmatrix}$$

Die Berechnungsgrundlagen der Durchbiegungen f_1 und f_2 sind bekannt.

$$f_1 = -\frac{5}{384} \cdot \frac{q}{E \cdot I} \cdot (1 - 2 \cdot Z)^4 \cdot \left(1 - \frac{24}{5} \cdot \frac{Z^2}{(1 - 2 \cdot Z)^2}\right)$$

$$f_2 = -\frac{1}{24} \cdot \frac{q}{E \cdot I} \cdot (1 - 2 \cdot Z)^4 \cdot \left(3 \cdot \frac{Z^4}{(1 - 2 \cdot Z)^4} + 6 \cdot \frac{Z^3}{(1 - 2 \cdot Z)^3} - \frac{Z}{1 - 2 \cdot Z}\right)$$

Dabei wird $q = E \cdot I$ festgelegt und die Durchbiegungen werden in $\omega\,(x, f_1, f_2)$ eingesetzt. Günstigerweise vereinfacht sich das Polynom leicht, trotz der umfangreichen Ausdrücke der Durchbiegungen.

$$\omega\,(x) = \frac{1}{24} \cdot \frac{(x - 1 + Z) \cdot (Z - x)}{8 \cdot Z^2 + Z - 1} \cdot \begin{pmatrix} +Z \cdot (8 \cdot Z + 1) \cdot x^2 \\ -Z \cdot (8 \cdot Z + 1) \cdot x \\ +6 \cdot Z \cdot (Z - 1) \\ +Z^3 + 1 \\ -(x - 1) \cdot x \end{pmatrix}$$

Diese Berechnungsgrundlage der Biegelinie ist die Arbeitsgleichung für folgende zu betrachtende Fälle.

Aus ermittelter Arbeitsgleichung können die Durchbiegungen $\widetilde{f}_1$ und $\widetilde{f}_2$ „neu“ ermittelt werden.

$$\widetilde{f}_1 = \frac{q}{576 \cdot E \cdot I} \cdot Z \cdot (Z - 1) \cdot \frac{Z^3 + 6 \cdot Z \cdot (Z - 1) + 1}{Z \cdot (8 \cdot Z + 1) - 1}$$

Und:

$$\widetilde{f}_2 = \frac{q}{9216 \cdot E \cdot I} \cdot (Z - 1) \cdot (2 \cdot Z - 1)^2 \cdot \frac{4 \cdot Z \cdot (Z - 1) + 24Z - 5}{Z \cdot (8 \cdot Z + 1) - 1}$$

Die Stellen der Durchbiegung NULL für $q = E \cdot I$.

$$f_1 = 0 \rightarrow Z = (-6,8916...; 0; \mathbf{0,2141...}; 0,6774...)$$

$$\widetilde{f}_1 = 0 \rightarrow Z = (-6,8916...; 0; \mathbf{0,2141...}; 0,6774...; 1)$$

Und:

$$f_2 = 0 \rightarrow Z = (-5,2386...; \mathbf{0,2386...}; 0,5; 0,5)$$

$$\widetilde{f}_2 = 0 \rightarrow Z = (-5,2386...; \mathbf{0,2386...}; 0,5; 0,5; 1)$$

[2] Siehe dazu: „(Polynom)Interpolation nach Newton“ www.Zenithpoint.de

3 Fallunterscheidungen

3.1 INT-MIN

INT-MIN

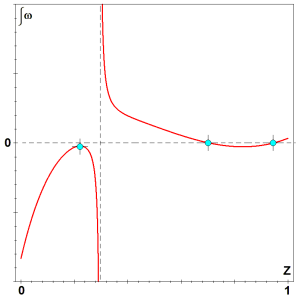
Fall 1: Minima der Summe der Verbiegung oberhalb und unterhalb der unverformten, neutralen Faser (INT-MIN)

Die durch die Biegelinie eingeschlossene Fläche oberhalb und der Fläche unterhalb der Abszisse soll gleich sein. Dafür wird das bestimmte Integral gebildet.

$$\int \omega = \int_0^1 \frac{1}{24} \cdot \frac{(x-1+Z)\cdot(Z-x)}{8\cdot Z^2+Z-1} \cdot \begin{pmatrix} +Z\cdot(8\cdot Z+1)\cdot x^2 \\ -Z\cdot(8\cdot Z+1)\cdot x \\ +6\cdot Z\cdot(Z-1) \\ +Z^3+1 \\ -(x-1)\cdot x \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$

$$\int \omega = \frac{1}{360} \cdot \frac{15\cdot Z^5+55\cdot Z^4-160\cdot Z^3+121\cdot Z^2-33\cdot Z+3}{8\cdot Z^2+Z-1}$$



Die Lösung der Aufgabenstellung erfordert:

$$Z^5+\frac{11}{3}\cdot Z^4-\frac{32}{3}\cdot Z^3+\frac{121}{15}\cdot Z^2-\frac{11}{5}\cdot Z+\frac{3}{15}=0$$

Es sind daher 5 Lösungen zu erwarten.

$$Z_1=-5,769\ldots \qquad Z_2=+0,706\ldots \qquad Z_3=+0,944\ldots$$
$$Z_4=+0,225\ldots+0,029\ldots\cdot i \qquad Z_5=+0,225\ldots-0,029\ldots\cdot i$$

Keine Lösung erfüllt die Forderung der Aufgabenstellung. Die komplexen Lösungen zeigen jedoch, dass es im Bereich $0 \le Z < 0,296\ldots$ ein Minima der Fläche (ein Maxima der Funktion) geben muss. Daher wird die Stelle des Minima nach folgend ermittelt.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\cdot\int \omega\cdot\mathrm{d}x = \frac{1}{72}\cdot\frac{72\cdot Z^6+188\cdot Z^5-238\cdot Z^4-108\cdot Z^3-173\cdot Z^2-58\cdot Z+6}{(8\cdot Z^2+Z-1)^2}=0$$

$\Rightarrow$

$$Z^6+\frac{47}{18}\cdot Z^5-\frac{119}{36}\cdot Z^4-\frac{3}{2}\cdot Z^3-\frac{173}{72}\cdot Z^2-\frac{29}{36}\cdot Z+\frac{1}{12}=0$$

Es sind 6 Lösungen zu erwarten.

$$Z_1=-3,388\ldots \qquad Z_2=-0,987\ldots \qquad Z_3=+0,222\ldots$$
$$Z_4=+0,355\ldots-0,092\ldots\cdot i \qquad Z_5=+0,355\ldots+0,092\ldots\cdot i \qquad Z_6=+0,830\ldots$$

Ein Minima der eingeschlossenen Fläche ist für

$$Z_{INT-MIN}=0,2220810809\ldots$$

definiert.

SUM-MIN

3.2 SUM-MIN

Fall 2: Die Durchbiegungen sollen minimal sein SUM-MIN

Dazu wird die Summe der Betragsdurchbiegungen $|f_1|$ und $|f_2|$ gebildet und dessen Ergebnis Null gesetzt.

$$|f_1| + |f_2| = \frac{1}{16} \cdot \left|(2 \cdot Z - 1)^2 \cdot \left(4 \cdot Z^2 + 20 \cdot Z - 5\right)\right| + \left|Z \cdot \left(Z^3 + 6 \cdot Z^2 - 6 \cdot Z + 1\right)\right| = 0$$

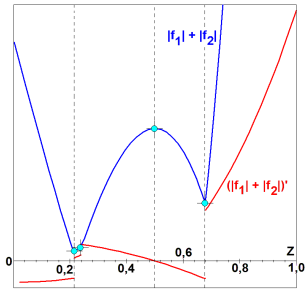
$\Rightarrow$

$$(2 \cdot Z - 1)^2 \cdot \left(4 \cdot Z^2 + 20 \cdot Z - 5\right) = 0 \quad \text{und} \quad Z \cdot \left(Z^3 + 6 \cdot Z^2 - 6 \cdot Z + 1\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{llll} Z_1 = -5,238\ldots & Z_2 = +0,5 & \text{und} & Z_1 = 0 \qquad\quad Z_2 = +0,677\ldots \\ Z_3 = +0,238\ldots & Z_4 = +0,5 & & Z_3 = -6,891\ldots \quad Z_4 = +0,214\ldots \end{array}$$

Beide Ausdrücke besitzen im definierten Bereich von Z keine gemeinsame Nullstelle. Jedoch besitzen diese ein Extrema, welches ein globales Minima in $0 \leq Z < 0,296\ldots$ darstellt.



Der für die Aufgabenstellung relevante Wert beläuft sich auf:

$$Z_{SUM-MIN} \approx 0,214174998\ldots$$

3.3 BES I

BESsel I

Fall 3: In den Auflagern soll die Verdrehung Null sein (BESsel I)

Die erste Ableitung von ω nach x beschreibt die Verdrehung des Balkens.

$$\omega' = \frac{d}{dx} \cdot \omega = \frac{1}{24} \cdot \frac{2 \cdot x - 1}{8 \cdot Z^2 + Z - 1} \cdot \begin{pmatrix} -16 \cdot Z^2 \cdot x \cdot (x-1) \\ +8 \cdot Z \cdot \left(Z^3 - Z^2 - Z - 1\right) \\ -2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (Z-1) \\ +15 \cdot Z \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Eine immer wiederkehrende Stelle von x, bei der die Verdrehung Null ist ergibt sich aus:

$$2 \cdot x - 1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

Die gesuchten Werte liefert der Klammerausdruck.

$$-16 \cdot Z^2 \cdot x \cdot (x-1) + 8 \cdot Z \cdot \left(Z^3 - Z^2 - Z - 1\right) - 2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (Z-1) + 15Z - 1 = 0$$

Da x in der zweiten Potenz vorkommt, sind zwei Lösungen zu erwarten.

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{128 \cdot Z^6 - 112 \cdot Z^5 - 96 \cdot Z^4 + 128 \cdot Z^3 - Z^2 - 18 \cdot Z + 3}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

Sowie:

$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{128 \cdot Z^6 - 112 \cdot Z^5 - 96 \cdot Z^4 + 128 \cdot Z^3 - Z^2 - 18 \cdot Z + 3}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

Zur Erinnerung, es wird das x gesucht, welches an einer der zwei möglichen Stellen von Z liegt. Z jedoch ist selbst gesucht und noch unbekannt, daher werden die beiden ermittelten Gleichungen mit diesen Stellen gleichgesetzt.

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{128 \cdot Z^6 - 112 \cdot Z^5 - 96 \cdot Z^4 + 128 \cdot Z^3 - Z^2 - 18 \cdot Z + 3}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Z_1 &= -0,158\ldots + 0,786\ldots \cdot i & Z_2 &= +0,232\ldots \\ Z_3 &= +0,833\ldots & Z_4 &= -0,158\ldots - 0,786\ldots \cdot i \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$1 - Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{128 \cdot Z^6 - 112 \cdot Z^5 - 96 \cdot Z^4 + 128 \cdot Z^3 - Z^2 - 18 \cdot Z + 3}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

$\Rightarrow$

$$Z = \emptyset$$

Weiterhin:

$$Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{128 \cdot Z^6 - 112 \cdot Z^5 - 96 \cdot Z^4 + 128 \cdot Z^3 - Z^2 - 18 \cdot Z + 3}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

$\Rightarrow$

$$Z = \emptyset$$

Weiterhin:

$$1 - Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{128 \cdot Z^6 - 112 \cdot Z^5 - 96 \cdot Z^4 + 128 \cdot Z^3 - Z^2 - 18 \cdot Z + 3}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Z_5 &= -0,158\ldots + 0,786\ldots \cdot i & Z_6 &= +0,232\ldots \\ Z_7 &= +0,833\ldots & Z_8 &= -0,158\ldots - 0,786\ldots \cdot i \end{aligned}$$

Der für die Aufgabenstellung relevante Wert beläuft sich auf:

$$Z_{B1} \approx 0,2329564092\ldots$$

Die Verdrehungen an diesen Stellen.

$$\omega'(0,2323) = 0 \qquad \omega'(1 - 0,2323) = 0$$

BESsel II

3.4 BES II

Fall 4: Die Auflager sollen momentenfrei sein (BESsel II)

Die zweite Ableitung von ω nach x beschreibt den Momentenverlauf am Balken.

$$\omega'' = \frac{d^2}{dx^2} \cdot \omega = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x-1) - \frac{2}{3} \cdot Z^2 \cdot \frac{Z^2 - Z - 2}{8 \cdot Z^2 + Z - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Z}{8 \cdot Z^2 + Z - 1} = 0$$

Die gesuchten Werte liefert der Ausdruck.

$$3 \cdot x \cdot (x-1) \cdot \left(8 \cdot Z^2 + Z - 1\right) - 4 \cdot Z^2 \cdot \left(Z^2 - Z - 2\right) - 3 \cdot Z = 0$$

Da x in der zweiten Potenz vorkommt, sind zwei Lösungen zu erwarten.

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{384 \cdot Z^6 - 336 \cdot Z^5 - 288 \cdot Z^4 + 384 \cdot Z^3 - 3 \cdot Z^2 - 54 \cdot Z + 9}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

Sowie:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{384 \cdot Z^6 - 336 \cdot Z^5 - 288 \cdot Z^4 + 384 \cdot Z^3 - 3 \cdot Z^2 - 54 \cdot Z + 9}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

Zur Erinnerung, es wird das x gesucht, welches an einer der zwei möglichen Stellen von Z liegt. Z jedoch ist selbst gesucht und noch unbekannt, daher werden die beiden ermittelten Gleichungen mit diesen Stellen gleichgesetzt.

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{384 \cdot Z^6 - 336 \cdot Z^5 - 288 \cdot Z^4 + 384 \cdot Z^3 - 3 \cdot Z^2 - 54 \cdot Z + 9}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

$\Rightarrow$

$$Z_1 = 0 \qquad Z_2 = +0,141\ldots$$
$$Z_3 = +0,708\ldots$$

Weiterhin:

$$1 - Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{384 \cdot Z^6 - 336 \cdot Z^5 - 288 \cdot Z^4 + 384 \cdot Z^3 - 3 \cdot Z^2 - 54 \cdot Z + 9}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

$\Rightarrow$

$$Z = \emptyset$$

Weiterhin:

$$Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{384 \cdot Z^6 - 336 \cdot Z^5 - 288 \cdot Z^4 + 384 \cdot Z^3 - 3 \cdot Z^2 - 54 \cdot Z + 9}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

$\Rightarrow$

$$Z = \emptyset$$

Weiterhin:

$$1 - Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{384 \cdot Z^6 - 336 \cdot Z^5 - 288 \cdot Z^4 + 384 \cdot Z^3 - 3 \cdot Z^2 - 54 \cdot Z + 9}}{8 \cdot Z^2 + Z - 1}$$

$\Rightarrow$

$$Z_1 = +0,708\ldots \qquad Z_2 = +0,14\ldots$$
$$Z_3 = 0$$

Der für die Aufgabenstellung relevante Wert beläuft sich auf:

$$Z_{B2} \approx 0,1410545827\ldots$$

Ebenfalls möglich mit großer Durchbiegung in der Balkenmitte

$$Z = 0$$

3.5 AIRY

AIRY

Fall 5: Die Balkenenden sollen eine horizontale Tangente besitzen (AIRY- Lagerung)

Diese Aufgabenstellung erfordert die erste Ableitung von ω.

$$\omega' = \frac{d}{dx} \cdot \omega = \frac{1}{24} \cdot \frac{2 \cdot x - 1}{8 \cdot Z^2 + Z - 1} \cdot \begin{pmatrix} -16 \cdot Z^2 \cdot x \cdot (x-1) \\ +8 \cdot Z \cdot \left(Z^3 - Z^2 - Z - 1\right) \\ -2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (Z-1) \\ +15 \cdot Z \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Gefragt ist die Verdrehung an der Stelle $x = 0$ und $x = 1$

$$\omega'(0) = -\frac{1}{24} \cdot \frac{8 \cdot Z \cdot \left(Z^3 - Z^2 - Z - 1\right) + 15 \cdot Z - 1}{8 \cdot Z^2 + Z - 1} = 0$$

$$\omega'(1) = +\frac{1}{24} \cdot \frac{8 \cdot Z \cdot \left(Z^3 - Z^2 - Z - 1\right) + 15 \cdot Z - 1}{8 \cdot Z^2 + Z - 1} = 0$$

Der im Zähler stehende Ausdruck liefert 4 Lösungen.

$$Z^4 - Z^3 - Z^2 + \frac{7}{8} \cdot Z - \frac{1}{8} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} Z_1 = +0,5 & Z_2 = -1 \\ Z_3 = +1,309\ldots & Z_4 = +0,190\ldots \end{array}$$

Der für die Aufgabenstellung relevante Wert beläuft sich auf:

$$Z_{AIRY} \approx 0,1909830055\ldots$$

NORM

3.6 NORM

Fall 6: Die maximalen Durchbiegungen sollen gleiche Beträge besitzen (NORMative Lagerung)

Es soll demnach gelten:

$$f_1 = f_2$$

$\Rightarrow$

$$32 \cdot Z^3 - 24 \cdot Z + 5 = 0$$

Drei Lösungen sind zu erwarten.

$$Z_1 = +0,732\ldots \qquad Z_2 = -0,955\ldots$$
$$Z_3 = +0,233\ldots$$

Der für die Aufgabenstellung relevante Wert beläuft sich auf:

$$Z_{NORM} \approx 0,2231491012\ldots$$

3.7 DREI

DREI

Fall 7: Die von Praktikern oft benutzte Drittelpunktlagerung (DREI)

Es wird einfach festgelegt, die Auflagerpunkte sind in den Drittelpunkten zu legen.

$$Z_{DREI} = 0,\bar{3}$$

4 Anhang

4.1 Zusammenfassung

Zum Schluss der Übersicht wegen, eine tabellarische Auflistung der im Text gewonnenen Werte. **Zusammenfassung**

Absolute Werte

Fall	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{K \cdot f_1}$	$\mathbf{K \cdot f_2}$	$\lvert\mathbf{K \cdot f_1}\rvert + \lvert\mathbf{K \cdot f_2}\rvert$
INT-MIN	0,2221	-0,0005895	-0,0004809	+0,0010704*
SUM-MIN	0,2142	-0,0008510	-0,0000000	+0,0008510*
BES I	0,2330	-0,0002119	-0,0013304	+0,0015423
BES II	0,1411	-0,0034584	+0,0019901	+0,0054485
AIRY	0,1910	-0,0016095	+0,0009947	+0,0026042
NORM	0,2231	-0,0005536*	-0,0005536*	+0,0011072
DREI	0,3333*	-0,0018325	+0,0123456	+0,0141781

Fall	$\mathbf{M}(\mathbf{0})$	$\mathbf{M}(\mathbf{Z})$	$\mathbf{M}(\mathbf{1/2})$	$\lvert\omega'(\mathbf{0})\rvert$ / $\lvert\omega'(\mathbf{1})\rvert$	$\lvert\omega'(\mathbf{Z})\rvert$
INT-MIN	+0,1033	+0,0169	-0,0217	+0,010	+0,002
SUM-MIN	+0,0974	+0,0132	-0,0276	+0,007	+0,004
BES I	+0,0238	+0,1131	-0,0119	+0,015	+0,000*
BES II	+0,0606	+0,0000*	-0,0644	+0,011	+0,015
AIRY	+0,0834	+0,0061	-0,0417	+0,000*	+0,008
NORM	+0,1042	+0,0174	-0,0208	+0,010	+0,002
DREI	-0,0093	-0,1204	-0,1343	+0,046	+0,022

Relative Werte zu SUM-MIN

Fall	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{K \cdot f_1}$	$\mathbf{K \cdot f_2}$**	$\lvert\mathbf{K \cdot f_1}\rvert + \lvert\mathbf{K \cdot f_2}\rvert$
INT-MIN	+1,037	+0,693	+1,565	+1,258*
SUM-MIN	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000*
BES I	+1,088	+0,249	+2,563	+1,812
BES II	+0,659	+4,064	+3,338	+6,402
AIRY	+0,892	+1,891	+2,169	+3,060
NORM	+1,042	+0,651*	+1,658*	+1,301
DREI	+1,556*	+2,153	+15,507	+16,661

** $K \cdot f_2 = |K \cdot f_1| + |K \cdot f_2| - K \cdot f_1 + 1$

Fall	$\mathbf{M}(\mathbf{0})$	$\mathbf{M}(\mathbf{Z})$	$\mathbf{M}(\mathbf{1/2})$	$\lvert\omega'(\mathbf{0})\rvert$ / $\lvert\omega'(\mathbf{1})\rvert$	$\lvert\omega'(\mathbf{Z})\rvert$
INT-MIN	+1,061	+1,280	+0,786	+1,429	+0,500
SUM-MIN	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
BES I	+0,244	+8,568	+0,431	+2,142	+0,000*
BES II	+0,622	+0,000*	+2,334	+1,571	+3,750
AIRY	+0,856	+0,462	+1,511	+0,000*	+2,000
NORM	+1,070	+1,318	+0,754	+1,429	+0,500
DREI	-0,095	-9,121	+4,866	+6,571	+5,500

* Für den Fall charakteristische Werte.

4.2 Darstellungen

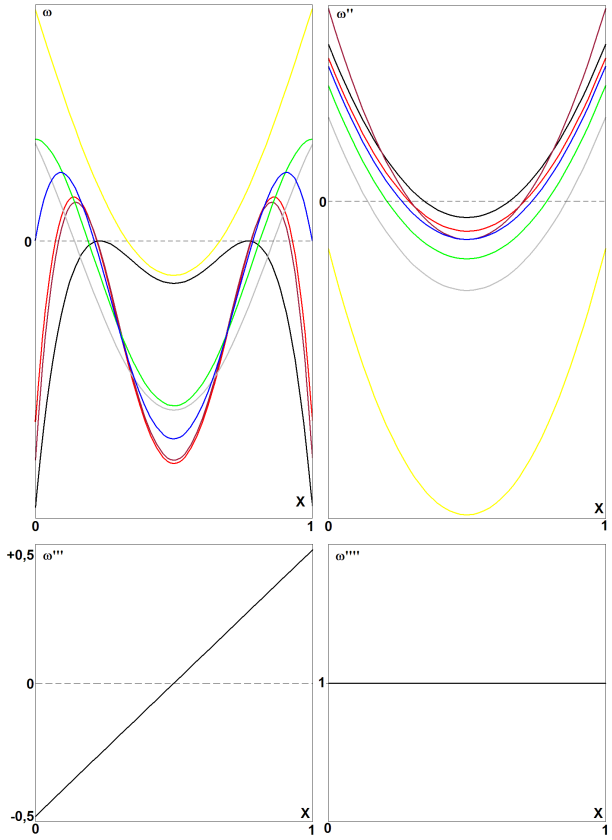
Darstellungen

Die grafische Darstellungen der

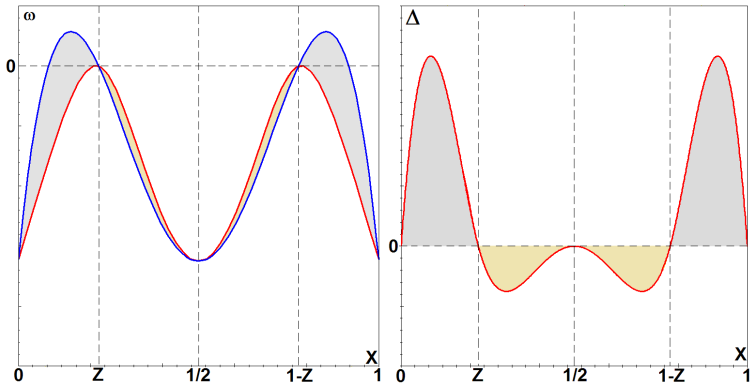
$$\begin{array}{lcl} \omega & \rightarrow & \text{Biege - ,} \\ \omega'' & \rightarrow & \text{Momenten - ,} \\ \omega''' & \rightarrow & \text{Querkraft - ,} \\ \omega'''' & \rightarrow & \text{Belastungslinie} \end{array}$$

Nicht maßstabsgerecht! Dabei sind folgende Farben den einzelnen Fällen zugeordnet:

INT-MIN , SUM-MIN , BESsel I , BESsel II , AIRY , NORM , DREI



Die grafische Darstellung der Biegelinien der „exakten“ Lösungen des dreiintervalligen Polynoms (ROT) und der Näherung des hier benutzten Ersatzpolynoms (BLAU). Die eingefärbten durch die Grafen eingeschlossenen Gebiete werden als Differenz Δ in der zweiten Abbildung noch einmal verdeutlicht. Für $Z_{NORM} = 0,2231$.



LaTeX 2_ε