

Mathematica – Blatt 20

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 01. November 1996 – Letzte Revision: 8. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Vorwort	3
1.2	Begriffserklärungen und Substitutionen	5
2	Die Ellipse – real	6
3	Anhang	17
3.1	Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen	17
3.2	Damals als Student	18

Literatur

[Göh87] Wilhelm Göhler. Höhere Mathematik - Formeln und Hinweise -. Leipzig, 1987. 10. Auflage.

1 Einleitung

1.1 Vorwort

Das hier vorliegende Teilprojekt **Methomatica** ist ein Teil des Projektes **Protel**. Dort hilft es, Laufzeitlängen von verschiedenen Protellaufformen zu ermitteln. Daher ist es verständlich, dass sich Methomatica nicht in den Möglichkeiten der Differentialgeometrie erschöpfen wird, kann und muss. [Göh87] ff.

Bei der Nutzung von Tafel- und Formelwerken tritt jedoch ein entscheidender Nachteil auf. Will man zum Beispiel den Radius eines Funktionsgraphen berechnen, so ist jede Menge Vorarbeit vonnöten, um letztendlich zum Ergebnis zu gelangen – 2. Ableitung bilden und die dritte Potenz des Bogenlängendifferentials ermitteln – letzteres wiederum nur bestimmbar, wenn man das Quadrat der 1. Ableitung zur Verfügung hat.

Hier setzt die vorliegende Sammlung differentialgeometrischer Berechnungsgrundlagen an. Egal wo man in die Methode einsteigt, es sind nur die Formfaktoren a und b nötig um den gewünschten Wert zu ermitteln.

Für den reibungslosen Ablauf der Berechnung am Protel war eine Konvertierung vom allgemeinen zum speziellen Fall eines Funktionsgraphen unbedingt nötig. Dies ging jedoch nicht ohne Kompromisse ab. Die Begrenzung auf ausgewählte, für Protel zugeschnittene Figuren und die Einführung von Formfaktoren war nötig. Letztendlich aber auch die Ablösung des allgemeinen Falls von der Funktionsgleichung bis zum Evolutenwinkel auf den speziellen Fall für den Punkt $P(x; y)$.

Folgende Funktionsfiguren wurden aufgenommen.

- Kreis – Methode C/H
- Kreissegment – Methode C/S
- Ellipse – Methode E
- Parabel – Methode P
- Dreieck - Methode T

Ein Teil der Berechnungsgrundlagen hat recht beachtliche Maße in Form und Fülle. Methode C/S und P besitzen solche mit seitenfüllenden Dimensionen. Deshalb wurde methodisch daher Metho... an die Entwicklung der Gleichungen herangegangen.

Konsequenz, die Einführung von 4 Gruppen.

- normiert
- quasinormiert
- quasireal
- real

Jetzt kann man von normiert bis real das Anwachsen der Berechnungsgrundlagen recht gut einsehen und verstehen, zum Beispiel die **Ellipse mit ihrer Bogenlänge**.

$$s := \pi \rightarrow s := \frac{1}{2} \pi b \rightarrow s \approx \frac{1}{2} \pi (a+1) \left(1 + \frac{1}{4} \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2} \right)$$

$$\rightarrow s \approx \frac{1}{2} \pi \left(a + \frac{1}{2} b \right) \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\left(a - \frac{1}{2} b \right)^2}{\left(a + \frac{1}{2} b \right)^2} \right)$$

Auch dies hatte folgende Überlegung zugrunde. Einerseits ist es eines Mathematikers Pflicht, ein Endergebnis zum finalen Umstellungsende FUE zu vereinfachen, andererseits stand gerade eben dies der Übersichtlichkeit im Wege. Deshalb sind einige, viele Gleichungen in zwei oder mehr Schreibweisen dargestellt, obwohl manchmal so isoliert dastehend, dies nicht unbedingt nötig ist, wie zum Beispiel Ellipse real Abschnitt Bogendifferential

$$ds^2 := 1 + \frac{a^2 (b - 2x)^2}{b^2 (bx - x^2)} = \frac{-4ax(ab - x) + b^2(bx - x^2) + a^2b^2}{b^2(bx - x^2)}$$

Zweiter Term liefert dann den Querverweis zum Quadratbogendifferential gleicher geometrischer Figur. Dritter Term für die Bogenlänge Ellipse quasireal. Für eine bessere Übersichtlichkeit wurde bei manchen Gleichungen daher auch völlig auf das FUE verzichtet.

Eine letzte Besonderheit soll nun noch erläutert werden. Bei einigen Berechnungsgrundlagen stehen neben den Gleichungen absolute Zahlen, obwohl diese in einem Tafelwerk nichts zu suchen haben. Nun, bei normierten Figuren sind die Formfaktoren a und b festgelegt, daher kann man dort zum FUE schreiten. Der Kreis normiert ist ein Beispiel dafür. Bei allen anderen wurde der Evolventenwinkel als Absoluta hinzugefügt, wobei der Punkt $P(x; y)$ und die Formfaktoren, entnehmbar aus der Grafik des dazugehörigen Abschnitts, als gegebene Größen anzusehen sind.

Eine kleine Sonderstellung besitzt auch der Abschnitt Bogenlänge. Im Gegensatz zu allen anderen Berechnungsgrundlagen, ist dort der Integrationsweg mit Substitution, Integrandenumformung und all den anderen Zwischenschritten aufgeführt.

Für den gediegenen Leser sei noch gesagt.

- Entwicklungszeitraum November 1996 bis April 1999
- etwa 450 Stunden Erstzeit
- zweimal überprüfte Ergebnisse

... und dennoch:

Fehler stecken jedoch im Detail, auch wenn es nur beim Schreiben in den Formeleditor war. Wer dies schon einmal getan und nochmal die Grundlagen der Methode C/S anschaut, weiß wovon hier geschrieben wird.

1.2 Begriffserklärungen und Substitutionen

Normierungsbegriff

- Als **normiert** wird *hier* eine geometrische Figur dann bezeichnet, wenn gilt:

$$a = 1 \quad b = 2$$

- Als **quasinormiert** wird *hier* eine geometrische Figur dann bezeichnet, wenn gilt:

$$a = \text{variabel} \quad \text{mit} \quad 0 < a < \infty$$

Für den Koeffizienten b gilt unabhängig von der Methode:

$$b = 2$$

- Als **quasireal** wird *hier* eine geometrische Figur dann bezeichnet, wenn gilt:

$$b = \text{variabel} \quad \text{mit} \quad 0 < b < \infty$$

Für den Koeffizienten a gilt abhängig von der Methode:

$$a_{\text{Kreis}} = \frac{b}{2} \quad a_{\text{Kreissegment}} = 1 \quad a_{\text{Ellipse}} = \frac{b}{2} \quad a_{\text{Parabel}} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad a_{\text{Dreieck}} = 1$$

- Als **real** wird *hier* eine geometrische Figur dann bezeichnet, wenn gilt:

$$a = \text{variabel} \quad \text{mit} \quad 0 < a < \infty$$

$$b = \text{variabel} \quad \text{mit} \quad 0 < b < \infty$$

Für den Kreis jedoch ist nur ein

$$a_{\text{Kreis}} = \frac{b}{2}$$

gültig

Substitutionen (einige Spezialfälle sind allgemeine Fälle anderer Methoden):

• Kreis,	normiert	~	vorhanden
• Kreis,	quasinormiert	~	vorhanden als Kreissegment, quasinormiert
• Kreis,	quasireal	~	vorhanden als Methode C/H
• Kreis,	real	~	vorhanden als Kreissegment, real
• Ellipse,	normiert	~	vorhanden als Kreis, normiert
• Ellipse,	quasinormiert	~	vorhanden
• Ellipse,	quasireal	~	vorhanden als Kreis, quasireal
• Ellipse,	real	~	vorhanden als Methode E
• Kreissegment,	normiert	~	vorhanden als Kreis, normiert
• Kreissegment,	quasinormiert	~	vorhanden
• Kreissegment,	quasireal	~	vorhanden
• Kreissegment,	real	~	vorhanden als Methode C/S
• Parabel,	normiert	~	vorhanden
• Parabel,	quasinormiert	~	vorhanden
• Parabel,	quasireal	~	vorhanden
• Parabel,	real	~	vorhanden als Methode P
• Dreieck,	normiert	~	vorhanden
• Dreieck,	quasinormiert	~	vorhanden
• Dreieck,	quasireal	~	vorhanden
• Dreieck,	real	~	vorhanden als Methode T

2 Die Ellipse – real

Ellipse, real:

$$a = \text{var.}$$

$$b = \text{var.}$$

- Funktionsgleichung:

$$y = 2 \frac{a}{b} \sqrt{x(b-x)}$$

- 1. Ableitung:

$$dy = \frac{a}{b} \frac{b-2x}{\sqrt{x(b-x)}}$$

- 2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{1}{2} \frac{ab}{\sqrt{x(b-x)}^3}$$

- Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{a^2}{b^2} \frac{(b-2x)^2}{x(b-x)}$$

- Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{(b-2x)^2}{x(b-x)}$$

- Bogendifferential:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{(b-2x)^2}{x(b-x)}}$$

- Bogenlänge:

$$s = \int_0^b \sqrt{1 + \frac{a^2 (b-2x)^2}{b^2 x(b-x)}} dx \rightarrow \text{Elliptisches Integral, nur Näherung !}$$

\Rightarrow

$$s = \frac{\pi}{4} (b+2a) \left[1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{64} \lambda^4 + \frac{1}{256} \lambda^6 + \frac{25}{16384} \lambda^8 + \dots \right]$$

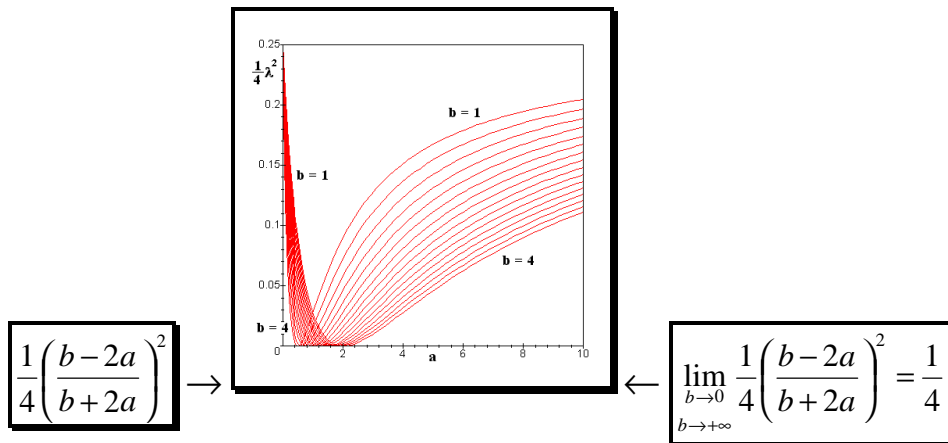
mit:

$$\lambda = \frac{b-2a}{b+2a}$$

\Leftarrow

$$s = \frac{\pi}{4} (b+2a) \left[1 + \frac{1}{4} \lambda^2 \right] \text{ für schwach exzentrische Ellipse}$$

\rightarrow Anteil des ersten Terms:



\Leftarrow für $a = 1$ und $b = 2$:

$$\rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \left(\frac{b-2a}{b+2a} \right)^2 = 0 \text{ ohne Exzentrizität, entspricht dem Kreis !}$$

$$\rightarrow s = \frac{\pi}{4} (b+2a) = \pi$$

- Krümmung:

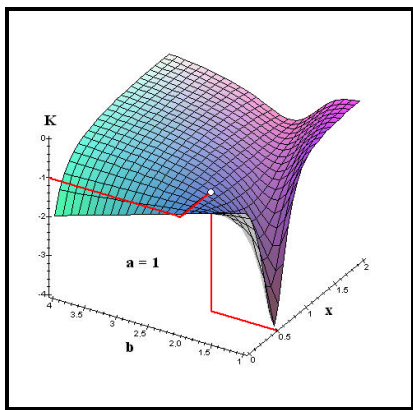
$$K = -\frac{1}{2} \frac{ab}{\sqrt{x(b-x) + \frac{a^2}{b^2}(b-2x)^2}^3}$$

← für $a = 1$ und $b = 2$:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{x(2-x) + (1-x)^2}^3}$$

← für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

$K = -1$ entspricht dem Kreis !



→

- Radius:

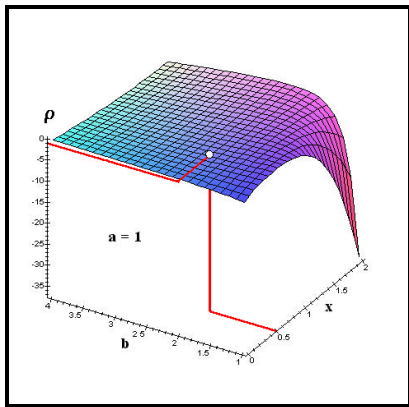
$$\rho = -2 \frac{\sqrt{x(b-x) + \frac{a^2}{b^2}(b-2x)^2}^3}{ab}$$

← für $a = 1$ und $b = 2$:

$$\rho = -\sqrt{x(2-x) + (1-x)^2}^3$$

← für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

$$\rho = -1$$



→

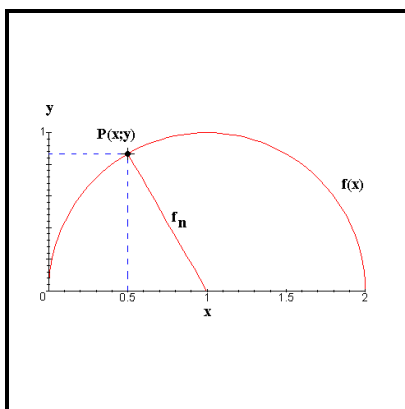
- Normalenfunktionsgleichung für $P(+\frac{1}{2}; y)$:

$$f_n = \frac{1}{4} \frac{a}{b} \sqrt{2b-1} \left(4 - \frac{b^2}{a^2(b-1)} (2x-1) \right)$$

← für $a = 1$ und $b = 2$:

$$f_n = -\sqrt{3}(x-1)$$

← für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:



→

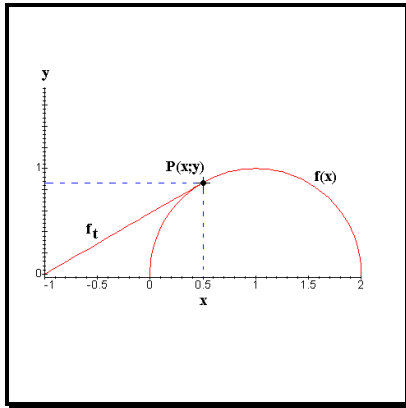
- Tangentenfunktionsgleichung für $P(+\frac{1}{2}; y)$:

$$f_t = \frac{a}{b} \sqrt{2b-1} \left(\frac{b-1}{2b-1} (2x-1) + 1 \right)$$

← für $a = 1$ und $b = 2$:

$$f_t = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+1)$$

← für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:



• Länge der Normale:

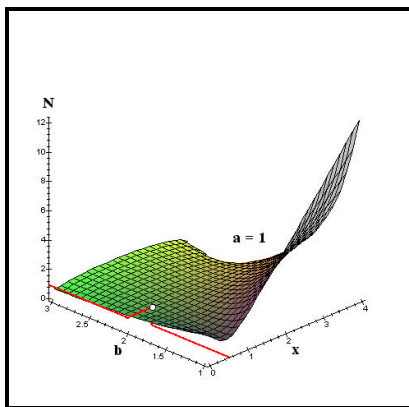
$$N = 2\frac{a}{b}\sqrt{x(b-x) + \frac{a^2}{b^2}(b-2x)^2}$$

← für $a = 1$ und $b = 2$:

$$N = \sqrt{x(2-x) + (1-x)^2}$$

← für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

$$N = 1$$



If questions:

B_Zindler@t-online.de

- Länge der Tangente:

$$T = 2 \frac{x(b-x)}{b-2x} \sqrt{1 + \frac{a^2 (b-2x)^2}{b^2 x(b-x)}}$$

← für $a = 1$ und $b = 2$:

$$T = \frac{x(2-x)}{1-x} \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{x(2-x)}}$$

← für $P\left(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$T = \sqrt{3}$$

⇒

$$\frac{N}{T} = \frac{a}{b} \frac{b-2x}{\sqrt{x(b-x)}} \rightarrow \frac{N}{T} = \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}} \rightarrow \frac{N}{T} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

- Länge der Subnormale:

$$S_n = 2 \frac{a^2}{b^2} (b-2x)$$

← für $a = 1$ und $b = 2$:

$$S_n = (1-x)$$

← für $P\left(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$S_n = \frac{1}{2}$$

- Länge der Subtangente:

$$S_t = 2 \frac{x(b-x)}{b-2x}$$

← für $a = 1$ und $b = 2$:

$$S_t = \frac{x(2-x)}{1-x}$$

← für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

$$S_t = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow S_n S_t = 4 \frac{a^2}{b^2} x(b-x) \rightarrow S_n S_t = x(2-x) \rightarrow S_n S_t = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \frac{S_n}{S_t} = \frac{a^2 (b-2x)^2}{b^2 x(b-x)} \rightarrow \frac{S_n}{S_t} = \frac{(1-x)^2}{x(2-x)} \rightarrow \frac{S_n}{S_t} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \frac{S_n}{S_t} = \left(\frac{N}{T}\right)^2$$

$$\rightarrow \sqrt{N^2 + T^2} = S_n + S_t$$

$$\rightarrow T = \sqrt{S_t(S_t + S_n)}$$

$$\rightarrow N = \sqrt{S_n(S_n + S_t)}$$

$$\rightarrow S_n = \frac{T^2 - S_t^2}{S_t}$$

$$\rightarrow S_t = \frac{N^2 - S_n^2}{S_n}$$

- Evolute:

$$\xi = x + 2 \frac{b-2x}{b^2} \left(x(b-x) + \frac{a^2}{b^2} (b-2x)^2 \right)$$

$$\eta = 2 \frac{a}{b} \sqrt{x(b-x)} \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(x(b-x) + \frac{a^2}{b^2} (b-2x)^2 \right) \right]$$

← für $a = 1$ und $b = 2$:

$$\xi = 1$$

$$\eta = 0$$

- Evolvente für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

$$\xi = x - s \Big|_0^{\frac{b}{4}} \cos \arctan \frac{a}{b} \frac{b-2x}{\sqrt{x(b-x)}} = x - s \Big|_0^{\frac{b}{4}} \frac{1}{ds}$$

$$\eta = 2 \frac{a}{b} \sqrt{x(b-x)} - s \Big|_0^{\frac{b}{4}} \sin \arctan \frac{a}{b} \frac{b-2x}{\sqrt{x(b-x)}} = y - s \Big|_0^{\frac{b}{4}} \frac{dy}{ds}$$

$\Leftrightarrow s \Big|_0^{\frac{b}{4}}$ ist individuell zu berechnen, z. B. $a = 0,5$ und $b = 2$:

$$y = 2 \frac{a}{b} \sqrt{x(b-x)} \rightarrow y = \frac{1}{2} \sqrt{x(2-x)} \rightarrow y = \frac{1}{4} \sqrt{3}$$

$$dy = \frac{a}{b} \frac{b-2x}{\sqrt{x(b-x)}} \rightarrow dy = \frac{1}{2} \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}} \rightarrow dy = \frac{1}{6} \sqrt{3}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{(b-2x)^2}{x(b-x)}} \rightarrow ds = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{(1-x)^2}{x(2-x)}} \rightarrow ds = \frac{1}{6} \sqrt{39}$$

$$s = \int_0^{\frac{b}{4}} ds dx \rightarrow s = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{(1-x)^2}{x(2-x)}} dx \rightarrow s \approx 0,7049\dots$$

\Leftarrow

$$\xi = \frac{1}{2} - 0,7049\dots \frac{2}{13} \sqrt{39} \approx -0,177\dots$$

$$\eta = \frac{1}{4} \sqrt{3} - 0,7049\dots \frac{1}{13} \sqrt{13} \approx 0,237\dots$$

$\Leftrightarrow s \Big|_0^{\frac{b}{4}}$ ist individuell zu berechnen, z. B. $a = 1$ und $b = 2$:

$$y = 2 \frac{a}{b} \sqrt{x(b-x)} \rightarrow y = \sqrt{x(2-x)} \rightarrow y = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$dy = \frac{a}{b} \frac{b-2x}{\sqrt{x(b-x)}} \rightarrow dy = \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}} \rightarrow dy = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{a^2 (b-2x)^2}{b^2 x(b-x)}} \rightarrow ds = \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{x(2-x)}} \rightarrow ds = \frac{2}{3} \sqrt{3}$$

$$s = \int_0^{\frac{b}{4}} ds dx \rightarrow s = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{x(2-x)}} dx \rightarrow s = \frac{1}{3} \pi$$

←

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \pi \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{6} (3 - \pi \sqrt{3}) \approx -0,4068...$$

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{3} \pi \frac{1}{2} \sqrt{3} \frac{1}{3} \sqrt{3} = \frac{1}{6} (3\sqrt{3} - \pi) \approx +0,3424...$$

⇒

$$\eta = 2 \frac{a}{b} \left[\sqrt{x(b-x)} - \frac{1}{2} (x-\xi) \frac{b-2x}{\sqrt{x(b-x)}} \right]$$

← für a = 0, 5 und b = 2:

$$\eta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{x(2-x)} - (x-\xi) \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}} \right]$$

← für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

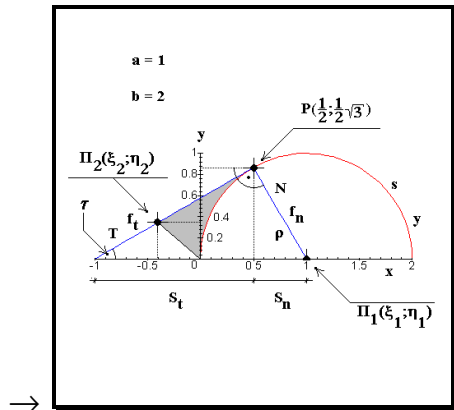
$$\eta = \frac{1}{6} \sqrt{3} (\xi + 1)$$

← für a = 1 und b = 2:

$$\eta = \sqrt{x(2-x)} - (x-\xi) \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}$$

← für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

$$\eta = \frac{1}{3} \sqrt{3} (\xi + 1)$$



- Evolventenwinkel:

$$\tan \tau = \frac{a}{b} \frac{b-2x}{\sqrt{x(b-x)}}$$

⇐ für $a = 1$ und $b = 2$:

$$\tan \tau = \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}$$

⇐ für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

$$\tan \tau = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

⇐

$$\tau = 30^\circ$$

⇐ für $a = 0.5$ und $b = 2$:

$$\tan \tau = \frac{1}{2} \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}$$

⇐ für $P(+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

$$\tan \tau = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

⇐

$$\tau \approx 16,102\dots^\circ$$

3 Anhang

3.1 Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen

Zum Teil historisch aus ersten Versionen!

Bezeichner	Bedeutung	Einheit
x	Definitionsbereich	[-]
y	Wertebereich	[-]
dy	1. Ableitung	[-]
d^2y	2. Ableitung	[-]
dy^2	Quadrat der 1. Ableitung	[-]
ds^2	Quadrat des Bogendifferentials	[-]
ds	Bogendifferential	[-]
s	Bogenlänge	[LE]
K	Krümmung	[LE]
ρ	Radius	[LE]
f_n	Normalenfunktionsgleichung	[-]
f_t	Tangentenfunktionsgleichung	[-]
N	Länge der Normale	[LE]
T	Länge der Tangente	[LE]
S_n	Länge der Subnormale	[LE]
S_t	Länge der Subtangente	[LE]
$\xi ; \eta$	Lage der Krümmungsmittelpunkte	[-]
$\tan \tau$	Evolventenwinkel	[°,rad]
x	Mittelpunktskoordinate des KK ¹ für KP ² $P(x, f(x))$	[-]
h	Mittelpunktskoordinate des KK für KP $P(x, f(x))$	[-]
a	vertikaler Formfaktor = y_{max}	[-]
b	horizontaler Formfaktor = $ x_1 - x_2 $	[-]
r	Radius des vollständigen Kreises bei C/S	[LE]
y_m	vertikale Exzentrizität KMP ³ zum KU ⁴ bei C/S	[-]
x_m	horizontale Exzentrizität KMP zum KU bei C/S	[-]
$\int_{x_1}^{x_2}$	Stammfunktion in den Grenzen x_1 und x_2	[-]

¹KK = Krümmungskreis

²KP = Kurvenpunkt

³KMP = Kreismittelpunkt

⁴KU = Koordinatenursprung

3.2 Damals als Student

Die damalige Technik, welche mir 1996 zur Verfügung stand.

- **Hardware:**

486 SX - 25 als Terminal in einem Netzwerk

- **Software:**

MS- DOS + diverse Systemerweiterungen

Windows 3. 11

Shell Norton

Netzwerk Novell

- **Anwendungen:**

Wordpad Textverarbeitung

Paint Grafiken

Maple V

Mapleinterner Schriftsatz als Formeleditor

- **Druck:**

Epson im Netzwerk

... und heute haben wir Gott sei es gedankt

ℒ_TE_X