χ-Oszillator

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 01. August 2003 – Letzte Revision: 1. September 2020

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Definition der $\int\limits_{c_n}^{\infty} ... \int\limits_{c_3}^{\infty} \int\limits_{c_2}^{\infty} \int\limits_{c_1}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} zdtdc_1dc_2dc_3...dc_n$-Funktion als Potential - Ermittlung der Eigenfrequenzen eines Harmonischen Oszillator

Was liegt näher, gegebene Funktion als Potential zu erklären. Dazu wird zuerst die einfache Form mit $q = 1$ und $p = 1$ betrachtet: [001]

$$\int\limits_{c_n}^{\infty} ... \int\limits_{c_3}^{\infty} \int\limits_{c_2}^{\infty} \int\limits_{c_1}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} zdtdc_1dc_2dc_3...dc_n = \Psi(c_n, n) = e^{-c_n}(\gamma - c_n - n)$$

Nachteil dieser (jetzt) Potentiale ist es, dass das Minimum nicht durch den Koordinatenursprung verläuft und somit eine inhomogene Bewegungsgleichung erzwingt. Da jedoch das Minimum selbst einer starken Regelmäßigkeit folgt, lässt sich Ψ leicht (hier) auf den Punkt (0;0) zentrieren, so gilt:

$$P_E\left(\gamma - n + 1; (-1)\, e^{-(\gamma-n+1)}\right) \qquad \leftrightarrow \qquad P_E\left(x; (-1)\, e^{-(x)}\right)$$

$\Rightarrow$

$$P_E : y = -e^{-x}$$

$\Rightarrow$

$$c_n = \gamma - n + 1$$

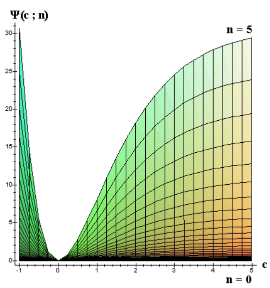
$\Rightarrow$

$$\Psi(c, n) = e^{-(c+\gamma-n+1)}(\gamma - (c + \gamma - n + 1) - n) + e^{-(\gamma-n+1)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\Psi(c, n) = e^{n-\gamma-1}\left(1 - e^{-c}(c + 1)\right)$$

Graphisch dargestellt, die nun zentrierten Potentiale für den Bereich $0 \leq n \leq 5$, wobei $n \in N_0$:



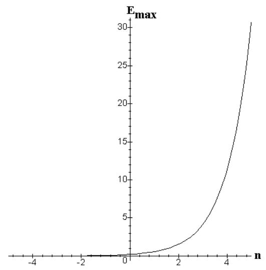
Aus der Berechnungsgrundlage von Ψ lässt sich die Maximalenergie des Oszillators für $c \to +\infty$ ablesen:

$$E_{\max}(n) = e^{n-\gamma-1} \quad \to \quad \bar{E}_{\max}(n) = \frac{E_{\max}(n)}{E_{\max}(0)} = e^n \quad \to \quad \bar{\bar{E}}_{\max} = \frac{E_{\max}(n)}{E_{\max}(n-1)} = e^1$$

$\Rightarrow$

n	0	1	2	3	4	5
E$_{max}$	0,206...	0,561...	1,526...	4,148...	11,277...	30,654...

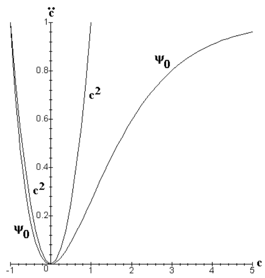
$\Rightarrow$



Wird E_{max} vernachlässigt, bleibt das Rumpfpotential übrig, wieder eine modifizierte Lambert- W-Funktion.

$$\Psi_0 (c) = 1 - e^{-c} (c + 1)$$

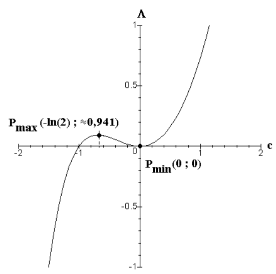
$\Rightarrow$



In der Graphik ist die Funktion c^2 mit dargestellt. Es ist das einfachste Potential eines harmonischen Oszillators, einem Feder-Masse-System. Die Differenz beider Potentiale zeigt das nächste Abbild.

$$\Delta = c^2 - \Psi_0 (c)$$

$\Rightarrow$



Interpretation:

- Versagen des Systems für $c \to +\infty$ zum Beispiel durch Bindungsbruch, Endanschlag der Feder.
- Überproportionale Zunahme des Potentials für $c \to -\infty$.

Damit entspricht sich das hier gefundene Potential vielen Vorgänge in der Natur.

Bevor die weiteren Betrachtungen am Potential fortgeführt werden, wird zuerst das des Feder-Masse- Schwingers untersucht und dessen Eigenfrequenzen ermittelt.

Die weiteren Berechnungen gelten für kleine Änderungen von c. So ist die Grundschwingung f_0 ermittelbar, wenn das Potential definiert wird als:

$$\Psi^{\bullet} (c, n) = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot e^{n-\gamma-1}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial c} \Psi^{\bullet} (c, n) = c \cdot e^{n-\gamma-1}$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung:

$$c'' = -\frac{\partial}{\partial c}\Psi^{\bullet}(c,n)$$

$\Rightarrow$

$$c'' = -c \cdot e^{n-\gamma-1}$$

Für diesen Fall gilt:

$$c'' + c \cdot e^{n-\gamma-1} = 0$$

Die charakteristische Gleichung liefert die Lösung dieser homogenen, linearen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\lambda^2 + e^{n-\gamma-1} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_{1;2} = 0 \pm \sqrt{-e^{n-\gamma-1}} = 0 \pm \sqrt{-1}\sqrt{e^{n-\gamma-1}} \equiv a \pm ib$$

Das System ist dann schwingungsfähig, wenn gilt:

$$-e^{n-\gamma-1} < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$e^{n-\gamma-1} > 0$$

Dieses System ist für alle Bedingungen schwingungsfähig. Es wurde ermittelt:

$$\begin{array}{rcl} a = 0 & \rightarrow & \text{ungedämpft} \\ b = \sqrt{e^{n-\gamma-1}} & \rightarrow & \text{Kreisfrequenz} \end{array}$$

Die Grundfrequenz ist definiert durch:

$$c = e^{ax} \cdot \sin(bt) = e^0 \cdot \sin(\omega_0 t) = \sin\left(t\sqrt{e^{n-\gamma-1}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{e^{n-\gamma-1}}$$

$\Rightarrow$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{e^{n-\gamma-1}}$$

$\Rightarrow$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{e^{-n+\gamma+1}}$$

Im Allgemeinen wird in den Naturwissenschaften die Wellenzahl ν_0 genutzt:

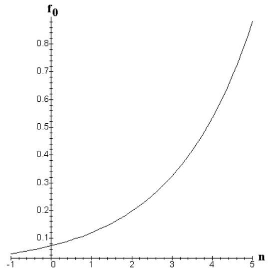
$$\nu_0 = \frac{c_L}{f_0}$$

$\Rightarrow$

$$\nu_0 = 2\pi \cdot c_L \cdot \sqrt{e^{n-\gamma-1}}$$

Wobei c_L hier die Phasengeschwindigkeit, respektive die Lichtgeschwindigkeit darstellt.

Die Frequenz f_0 graphisch dargestellt:



$\Rightarrow$

n	0	1	2	3	4	5
f_0	0,072...	0,119...	0,196...	0,324...	0,534...	0,881...

Wobei stillschweigend die Masse des Ersatzschwingsystems mit 1 angesetzt wurde, was für die spätere Berechnung der Eigenfrequenzen invariant ist.

Weiterhin gilt:

$$\bar{f}_0\left(n\right)=\frac{f_0\left(n\right)}{f_0\left(0\right)}=\sqrt{e^n}\rightarrow\quad\bar{\bar{f}}_0=\frac{f_0\left(n\right)}{f_0\left(n-1\right)}=\sqrt{e^1}$$

Es wurde ermittelt:

$$\omega_0^2=e^{n-\gamma-1}$$

Damit ergibt sich für die Bewegungsdifferentialgleichung des Ersatzsystems:

$$\Psi^{\bullet}\left(c,n\right)=\frac{1}{2}\left(\omega_0\cdot c\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$c''+\omega_0^2\cdot c=0$$

Um die Eigenwerte und Eigenfrequenzen berechnet zu können wird ein geeignetes Störglied eingeführt:

$$c''+\omega_0^2\cdot c=\varepsilon\cdot\sin\left(\nu t\right)$$

Dabei gilt für ε:

$$0<\varepsilon<1$$

Es liegt nun eine inhomogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor. Nachteil, im Störglied kommt die physikalische Leitgröße Zeit t vor. Da sämtliche Betrachtungen bis zum jetzigen Zeitpunkt ein beliebiger intrinsischer Faktor c war, wird dieser wieder eingeführt, indem t dimensionslos gemacht wird. So soll gelten:

$$\tau=\nu t$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{dt}\frac{d\tau}{d\tau}=\frac{dq}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{dq}{d\tau}\nu=q'\nu$$

... und:

$$\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{d^2q}{dt^2}\frac{d\tau^2}{d\tau^2}=\frac{d^2q}{d\tau^2}\frac{d\tau^2}{dt^2}=\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2\frac{d\tau^2}{dt^2}=\nu^2\frac{d\tau^2}{dt^2}=\nu^2q''$$

$\Rightarrow$

$$\nu^2\cdot c''+\omega_0^2\cdot c=\varepsilon\cdot\sin\left(\tau\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$c''+\left(\frac{\omega_0}{\nu}\right)^2\cdot c=\frac{\varepsilon}{\nu^2}\cdot\sin\left(\tau\right)$$

Die Lösung der linken Seite ist bekannt und oben bereits gezeigt, so dass nur noch die Lösung der Störung berechnet werden muss. Die Summe beider Ergebnisse ist die Lösung.

Homogene Lösung:

$$c_H=\sin\left(\frac{\omega_0}{\nu}t\right)$$

Störglied:

$$r\left(\tau\right)=\frac{\varepsilon}{\nu^2}\cdot\sin\left(\tau\right)$$

$\Rightarrow$

$$r\left(x\right)=a\cdot\cos\left(mx\right)+b\cdot\sin\left(mx\right)$$

$\Rightarrow$

$$r\left(x\right)=C_1\left(x\right)y_1\left(x\right)+C_2\left(x\right)y_2\left(x\right)$$

⇒

$$\begin{aligned} C_1(\tau) &= 0 \\ C_2(\tau) &= \frac{\varepsilon}{\nu^2} = \varepsilon \cdot \frac{t^2}{\tau^2} \\ y_1(\tau) &= 0 \\ y_2(\tau) &= \sin(\tau) \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned} C_1'(\tau) &= 0 \\ C_2'(\tau) &= -2\varepsilon \cdot \frac{t^2}{\tau^3} = -\frac{\varepsilon}{\nu^2} \cdot \frac{2}{\tau} \\ y_1'(\tau) &= 0 \\ y_2'(\tau) &= \cos(\tau) \end{aligned}$$

⇒

$$C_1'(\tau)\, y_1(\tau) + C_2'(\tau)\, y_2(\tau) = 0$$

$$C_1'(\tau)\, y_1'(\tau) + C_2'(\tau)\, y_2'(\tau) = r(\tau)$$

⇒

$$-\frac{\varepsilon}{\nu^2} \cdot \frac{2}{\tau} \cdot \sin(\tau) = 0 \qquad -\frac{\varepsilon}{\nu^2} \cdot \frac{2}{\tau} \cdot \cos(\tau) = \frac{\varepsilon}{\nu^2} \cdot \sin(\tau)$$

Nichttrivial sind die Lösungen:

$$y_2(\tau) = \sin(\tau) = 0 \qquad y_2'(\tau) = \cos(\tau) = 0$$

⇒

$$y_2(\tau) = c_{S_1} = c_{S_2} = \sin(\tau) = \sin(\nu t)$$

Gesamtlösung wird demnach sein:

$$c(t) = \sin\left(\frac{\omega_0}{\nu} t\right) + \sin(\nu t)$$

Randbedingungen für die Eigenwerte innerhalb der Konventionen eines Potentials

$$c(0) = c(2\pi) = 0$$

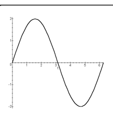
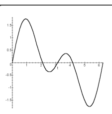
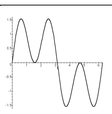
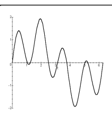
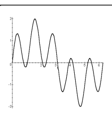
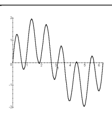
Diese Randbedingung ist erfüllt. Da außerdem eine weitere Bedingung die Periode $2n\pi$ für Eigenwerte gefordert ist, sind ganzzahlige Vielfache von ω_0 gültig:

$$\omega_0 = n\nu$$

⇒

$$c = \sin(nt) + \sin(\nu t)$$

Alle Randbedingungen bleiben erhalten für $n \in N$. Womit die oben beschriebene Quantelung über n in der Energie wieder gefunden ist und die Eigenfrequenzen bestimmt (bei $\nu = \pi$).

n	1	2	3	4	5	6
						

Gefundene Ergebnisse gelten, wie festgelegt, nur für das Feder- Masse- Potential.