Definition des Potentials als Oszillator

Einführung der Anharmonizität- „χ“

Wie sieht die ganze Sache für den Anharmonischen Oszillator aus?

$$\boxed{\Psi(c,n) = e^{n-\gamma-1}\left(1-e^{-c}(c+1)\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\Psi_0(c) = 1-e^{-c}(c+1)}$$

Die erwartete Differentialgleichung ist nichtlinear und so mit vertretbaren Aufwand unlösbar. Abhilfe schafft es, „$\Psi_0(c)$“ mittels Taylor- Entwicklung zu polynomisieren:

$$\boxed{\Psi_0(c) = 1-e^{-c}(c+1)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\Psi_0(c) = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{8}c^4 - \frac{1}{30}c^5 + \frac{1}{144}c^6 - \frac{1}{840}c^7 + \frac{1}{5760}c^8 - \frac{1}{40320}c^9 + \ldots}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\Psi_0(c,n) = e^{n-\gamma-1}\left(\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{3}c^3 + \frac{1}{8}c^4 - \frac{1}{30}c^5 + \frac{1}{144}c^6 - \frac{1}{840}c^7 + \frac{1}{5760}c^8 - \frac{1}{40320}c^9 + \ldots\right)}$$

Vorerst wird mit bis „c^9“ weiter gerechnet. Im weiteren Verlauf wird dieser Mangel wieder beseitigt. Ein Vergleich für „$\Psi_0(c)$“ als Polynom und im Original graphisch dargestellt. Mann beachte die Potenz von „c^2“. Es entspricht die des Harmonischen Oszillators:

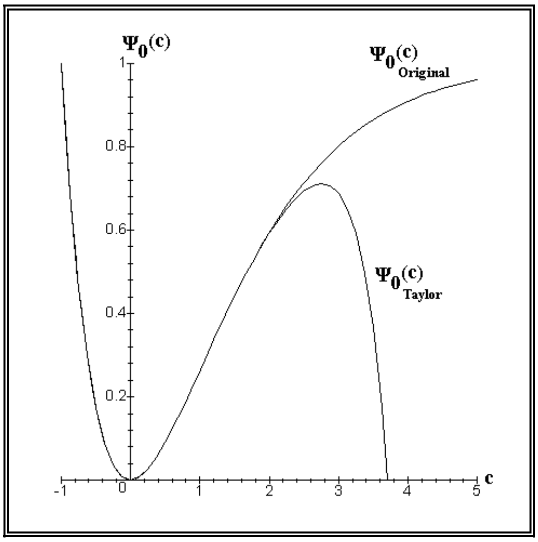

Abb. 13: Die beiden Berechnungsgrundlagen von „$\Psi_0(c)$“ graphisch dargestellt.

Für das „c^9“- Polynom sind zwischen „$-1 < c < 2$“ gute Ergebnisse zu erwarten.

Die Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial c}\Psi(c,n)=e^{n-\gamma-1}\left(c-c^2+\frac{1}{2}c^3-\frac{1}{6}c^4+\frac{1}{24}c^5-\frac{1}{120}c^6+\frac{1}{720}c^7-\frac{1}{5040}c^8\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{c''=-\frac{\partial}{\partial c}\Psi^{\bullet}(c,n)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{c''+e^{n-\gamma-1}\left(c-c^2+\frac{1}{2}c^3-\frac{1}{6}c^4+\frac{1}{24}c^5-\frac{1}{120}c^6+\frac{1}{720}c^7-\frac{1}{5040}c^8\right)=0}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{c''+f(c,n)c=0}$$

mit:

$$\boxed{f(c,n)=e^{n-\gamma-1}\left(1-c+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{6}c^3+\frac{1}{24}c^4-\frac{1}{120}c^5+\frac{1}{720}c^6-\frac{1}{5040}c^7\right)}$$

Die charakteristische Gleichung:

$$\boxed{\lambda^2+f(c,n)=0}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\lambda_{1;2}=\pm\sqrt{-1}\sqrt{f(c,n)}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l}a=0\\ \\ b=\omega_0=\sqrt{f(c,n)}\end{array}}$$

Das System ist dann schwingungsfähig, wenn gilt:

$$\boxed{f(c,n)>0}$$

Für das vollständige Taylor- Polynom ist bekannt, dass für „c ≠ 0“ diese Bedingung erfüllt ist.

Die Schwingfähigkeit ist gegeben. Die Lösung der Differentialgleichung:

$$\boxed{c=\sin(\omega_0 t)=\sin\left(t\sqrt{f(c,n)}\right)}$$

Die Bewegungsdifferentialgleichung jetzt:

$$\boxed{\omega_0^2=f(c,n)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{c'' + \omega_0^2 c = 0}$$

Damit ist dies die gleiche Bewegungsdifferentialgleichung, wie bei einem Harmonischen Oszillator. Deshalb ergibt die Störungsrechnung das gleiche Ergebnis:

$$\boxed{c(t) = \sin\left(\frac{\omega_0}{\nu} t\right) + \sin(\nu t)}$$

Da außerdem eine weitere Bedingung die Periode „2π“ für Eigenwerte gefordert ist, sind nur ganzzahlige Vielfache von „ω_0“ gültig:

$$\boxed{\omega_0 = n\nu}$$

Es war und ist gegeben:

$$\begin{aligned}
&\left(\omega_0^2\right)_{Harmonic} = e^{n-\gamma-1} \\
&\left(\omega_0^2\right)_{Anharmonic} = e^{n-\gamma-1}\left(1 - c + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{24}c^4 - \frac{1}{120}c^5 + \frac{1}{720}c^6 - \frac{1}{5040}c^7\right)
\end{aligned}$$

Ob die Quantelung über „n“ weiterhin gegeben ist, soll überprüft werden:

$$\boxed{\frac{\left(\omega_0^2\right)_{Anharmonic}}{\left(\omega_0^2\right)_{Harmonic}} = 1 - c + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{24}c^4 - \frac{1}{120}c^5 + \frac{1}{720}c^6 - \frac{1}{5040}c^7}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{\left(\omega_0^2\right)_{Anharmonic}}{\left(\omega_0^2\right)_{Harmonic}} = e^{\overline{\chi}} = \frac{1}{1}c^0 - \frac{1}{1}c^1 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{24}c^4 - \frac{1}{120}c^5 + \frac{1}{720}c^6 - \frac{1}{5040}c^7}$$

Der Wert „e^{χ}“ ist die globale, exponentielle Anharmonizität, im Bereich von „-1 < c < 2“ („c^9“- Polynom !) gilt:

c	-1	0	1	2	3
$e^{\overline{\chi}}$	2, 718...	1, 000...	0, 367...	0, 132...	-0, 023...

Für „c = 0“ liegt keine Verzerrung des Ersatzsystemes, des Feder- Masse-Schwingsystems vor. Die globale, lineare Anharmonizität lässt sich berechnen über:

$$\boxed{\overline{\chi} = \ln\left(\frac{1}{1}c^0 - \frac{1}{1}c^1 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{24}c^4 - \frac{1}{120}c^5 + \frac{1}{720}c^6 - \frac{1}{5040}c^7\right)}$$

$\Rightarrow$

c	-1	0	1	2	3
$\overline{\chi}$	1	0	-1	-2	-

Der Wert für „c = 3“ konnte nicht berechnet werden, welches daran liegt, dass die Polynomisierung bis „c^9“ über Taylor nicht mehr scharf genug ist.

Dieser schon angedeutete Mangel soll beseitigt werden. Es ist erkennbar, dass für die Anharmonizität über alles gilt:

$$\boxed{\overline{\chi} = \ln\left(\frac{1}{1}c^0 - \frac{1}{1}c^1 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{24}c^4 - \frac{1}{120}c^5 + \frac{1}{720}c^6 - \frac{1}{5040}c^7 \ldots\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\overline{\chi} = \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{c^n}{n!}\right)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\overline{\chi} = \ln e^{-c}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\overline{\chi} = -c}$$

Damit ist gezeigt, dass das vorliegende Potential ideal in seiner Anharmonizität ist. Die Teilanharmonizitäten können somit definiert werden:

$$\boxed{\chi_n = \frac{(-1)^n}{n!}}$$

Es wurde berechnet:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\omega_0^2\right)_{Harmonic} &= e^{n-\gamma-1} \\ \left(\omega_0^2\right)_{Anharmonic} &= e^{n-\gamma-1}\left(1 - c + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{24}c^4 - \frac{1}{120}c^5 + \frac{1}{720}c^6 - \frac{1}{5040}c^7\right) \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\omega_0^2\right)_{Harmonic} &= e^{n-\gamma-1} \\ \left(\omega_0^2\right)_{Anharmonic} &= e^{n-\gamma-1}\overline{e^{\chi}} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\omega_0^2\right)_{Harmonic} &= e^{n-\gamma-1} \\ \left(\omega_0^2\right)_{Anharmonic} &= e^{n-\gamma-1+\overline{\chi}} \end{aligned}}$$

Damit alle Bedingungen der Eigenfrequenzen erfüllt sind, muss gelten:

$$\boxed{\frac{\left(\omega_0^2\right)_{Harmonic}}{\left(\omega_0^2\right)_{Anharmonic}} = n = \frac{e^{n-\gamma-1}}{e^{n-\gamma-1+\overline{\chi}}}}$$

mit:

$$\boxed{n \in N}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{n = e^{-\overline{\chi}} = e^{c}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{c = \ln n}$$

Damit ist gezeigt, dass nur der rechte aufsteigende Zweig für die Quantelung verantwortlich ist. Nun ist berechenbar, an welcher Stelle von „c“ die Eigenfrequenz des Wertes „n“ liegt, es folgt:

n	1	2	3	4	5	6
c	0	0, 693...	1, 098...	1, 386...	1, 609...	1, 791...

Die Potentialstufen, an der die Eigenfrequenzen liegen:

$$\boxed{\Psi_0(c) = 1 - e^{-c}(c+1)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_n\Psi_0(n) = 1 - e^{-\ln n}(\ln n + 1)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{{}_n\Psi_0(n) = 1 - \frac{\ln n + 1}{n}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} {}_n\Psi_0(n) \quad = 1}$$

$\Rightarrow$

n	1	2	3	4	5	6	7
${}_n\Psi_0(n)$	0	0, 153...	0, 300...	0, 403...	0, 478...	0, 534...	0, 579...

Diese Tatsache graphisch dargestellt:

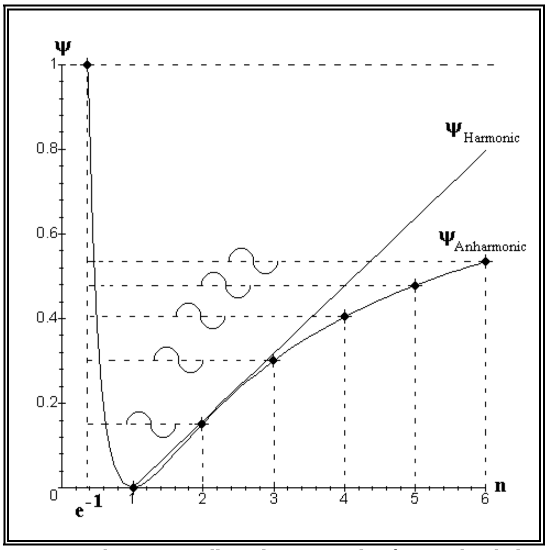

Abb. 14: Die Berechnungsgrundlage der Potentialstufen graphisch dargestellt:.