Zusammenfassung der gewonnen Erkenntnisse

Ein Abstecher zum Morsepotential

Es interessiert die Entwicklung der Differenz der Potentialstufen, worauf die Eigenfrequenzen liegen. So wird angesetzt:

$$\boxed{{}_{n-1}\overline{\Psi}_0(n) = {}_n\Psi_0(n) - {}_{n-1}\Psi_0(n) = \frac{\ln\frac{(n-1)^n}{n^{(n-1)}} + 1}{(n-1)n}}$$

Die Differenz zwischen den einzelnen Potentialebenen der Eigenfrequenzen werden somit mit zunehmenden „n"- Werten immer geringer.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} {}_{n-1}\overline{\Psi}_0(n) = 0}$$

Zusammenfassung:

Was wurde auf den etwa letzten 10 Seiten dargestellt:

- Das im ersten Abschnitt entwickelte mehrfache Flächenintegral einer modifizierten Lambert- W- Funktion mit besonderen Punkteigenschaften wurde zum Potential erklärt:

$$\boxed{\int_{c_n}^{\infty}\ldots\int_{c_3}^{\infty}\int_{c_2}^{\infty}\int_{c_1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} z\,dt\,dc_1\,dc_2\,dc_3\ldots dc_n = \Psi(c_n,n) = e^{-c_n}(\gamma - c_n - n)}$$

- Damit dieses Potential als „Anharmonischen Oszillator" angesehen werden kann, muss dieses auf den Koordinatenursprung P(0;0) zentriert werden:

$$\boxed{\Psi(c,n) = e^{n-\gamma-1}\left(1 - e^{-c}(c+1)\right)}$$

- Das Rumpf-, das Nullpotential mit „n = γ + 1" wurde extrahiert, um es mit dem Potential eines „Harmonischen Oszillators" weiter betrachten zu können:

$$\boxed{\Psi_0(c)_{Anharmonic} = 1 - e^{-c}(c+1)} \leftrightarrow \boxed{\Psi_0(c)_{Harmonic} = \frac{1}{2}c^2}$$

- Die Grundschwingung „ω_0" beider Oszillatoren wird berechnet, wobei der Wert „$\overline{e^\chi}$" als die globale, exponentielle Anharmonizität erklärt wurde:

$$\boxed{\left(\omega_0^2\right)_{Anharmonic} = \overline{e^\chi}\left(\omega_0^2\right)_{Harmonic}} \leftrightarrow \boxed{\left(\omega_0^2\right)_{Harmonic} = e^{n-\gamma-1}}$$

- Die Eigenfrequenzen beider Oszillatoren werden über die Störungsrechnung definiert:

$$\boxed{c_{Anharmonic} = c_{Harmonic} = \sin(nt) + \sin(vt)} \leftrightarrow \boxed{n \in N} \leftrightarrow \boxed{v = const.}$$

- Konsequenz der zwingend gleichen Randbedingung aller Eigenfrequenzen beider Oszillatoren ist es, dass die Eigenfrequenzen gleichen Wertes „n“ ein unterschiedliches Potential, die Potentialebenen besitzen:

$$\boxed{{}_n\Psi_0(n)_{Anharmonic} = 1 - \frac{\ln n + 1}{n}} \leftrightarrow \boxed{{}_n\Psi_0(n)_{Harmonic} = \frac{1}{2\pi}(n-1)} \leftrightarrow \boxed{n \in N}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_n\Psi_0(1)_{Anharmonic} = 0} = \boxed{{}_n\Psi_0(1)_{Harmonic} = 0}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_n\Psi_0(2)_{Anharmonic} = 0{,}153...} \approx \boxed{{}_n\Psi_0(2)_{Harmonic} = 0{,}159...}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_n\Psi_0(3)_{Anharmonic} = 0{,}300...} < \boxed{{}_n\Psi_0(3)_{Harmonic} = 0{,}318...}$$

- Die oben genannte globale, exponentielle Anharmonizität wurde zum Schluss weiter entwickelt und festgestellt, dass gilt:

$$\boxed{\overline{e^{\chi}}(c) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c^n}{n!} = e^{-c}}$$

- Die globale, lineare Anharmonizität lässt sich für vorliegendes Potential leicht berechnen und festgestellt, dass das Potential ideal ist, weil „$\overline{\chi}$“ die einfachste lineare Funktion von „c“ darstellt:

$$\boxed{\overline{\chi} = -c} \rightarrow \boxed{\overline{\chi} = \ln\frac{1}{n}}$$

- Aus der Berechnungsgrundlage der globalen, exponentiellen Anharmonizität lassen sich die Teilanharmonizitäten berechnen, so gilt:

$$\boxed{\chi_n = \frac{(-1)^n}{n!}} \leftrightarrow \boxed{n \in N_0}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_0 &= +\frac{1}{1} \\ \chi_1 &= -\frac{1}{1} \\ \chi_2 &= +\frac{1}{2} \end{aligned}}$$

Ein Vergleich zum Morsepotential. Dieses ist definiert als:

$$\boxed{\Psi_{Morse} = E_{\max}\left(1-e^{-c}\right)^2}$$

Das Rumpfpotential wird extrahiert:

$$\boxed{{}_0\Psi_{Morse} = \left(1-e^{-c}\right)^2}$$

„Taylor“- zerlegt:

$$\boxed{{}_0\Psi_{Morse} = c^2 - c^3 + \frac{7}{12}c^4 - \frac{1}{4}c^5 + \frac{31}{360}c^6 - \frac{1}{40}c^7 + \frac{127}{20160}c^8 - \frac{17}{12096}c^9 + \ldots}$$

Die erste Ableitung:

$$\boxed{{}_0\Psi_{Morse}\frac{\partial}{\partial c} = 2c - 3c^2 + \frac{7}{3}c^3 - \frac{5}{4}c^4 + \frac{31}{60}c^5 - \frac{7}{40}c^6 + \frac{127}{2520}c^7 - \frac{17}{1344}c^8 + \ldots}$$

Durch „c“ dividiert:

$$\boxed{\frac{{}_0\Psi_{Morse}}{c}\frac{\partial}{\partial c} = 2c^0 - 3c^1 + \frac{7}{3}c^2 - \frac{5}{4}c^3 + \frac{31}{60}c^4 - \frac{7}{40}c^5 + \frac{127}{2520}c^6 - \frac{17}{1344}c^7 + \ldots}$$

Logarithmiert ergibt es die globale, lineare Anharmonizität angezeigt als Polynom der Teilanharmonizitäten:

$$\boxed{\overline{\chi} = \ln\left(\frac{{}_0\Psi_{Morse}}{c}\frac{\partial}{\partial c}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}c^0 - \frac{3}{1}c^1 + \frac{7}{3}c^2 - \frac{5}{4}c^3 + \frac{31}{60}c^4 - \frac{7}{40}c^5 + \frac{127}{2520}c^6 - \frac{17}{1344}c^7 + \ldots\right)}$$

Es sind die Teilanharmonizitäten vergleichbar:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\chi_{n;ideal}$	$+^1/_1$	$-^1/_1$	$+^1/_2$	$-^1/_6$	$+^1/_{24}$	$-^1/_{120}$	$+^1/_{720}$	$-^1/_{5040}$
$\chi_{n;Morse}$	$+^2/_1$	$-^3/^1$	$+^7/_3$	$-^5/_4$	$+^{31}/_{60}$	$-^7/_{40}$	$+^{127}/_{2520}$	$-^{17}/_{1344}$

Bleibt die globale, lineare Anharmonizität als nichtunendliches Polynom zu berechnen, dies ist möglich, wenn eine Expandierung auf das Ende verlegt wird und die nichtlinearen Glieder größer „c^1“ gestrichen werden. Ergebnis ist eine Näherung:

$$\boxed{{}_0\Psi_{Morse} = \left(1-e^{-c}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial c}{}_0\Psi_{Morse} = 2e^{-c}\left(1-e^{-c}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{{}_0\Psi_{Morse}}{c}\frac{\partial}{\partial c} = 2\frac{e^{-c}}{c}\left(1-e^{-c}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\overline{\chi} = \ln\left(\frac{{}_0\Psi_{Morse}}{c}\frac{\partial}{\partial c}\right) = \ln\left[2\frac{e^{-c}}{c}\left(1-e^{-c}\right)\right]}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\overline{\chi} = \ln(2)c^0 - c^1 - \ln\left(c^1\right) + \ln\left(1-\frac{1}{e^c}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\overline{\chi} = \ln 2 - c}$$

Die „Globale, lineare Anharmonizität“ besitzt ein Offset.