χ-Oszillator

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 01. August 2003 – Letzte Revision: 1. September 2020

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Einfluss der Werte q und p - Eine kleine Zusammenfassung

Was bleibt zu tun? Es muss noch geklärt werden, welchen Einfluss die Werte p und q, die bis jetzt als 1 angenommen wurden, auf einige vorliegende, berechnete Werte haben. So wird das Potential erweitert von: [001]

$$\Psi\left(c_n, n\right) = e^{-c_n} \cdot \left(\gamma - c_n - n\right)$$

Auf:

$$\Psi\left(c_n, n, p, q\right) = \frac{p}{q^{n+2}} \cdot e^{-qc_n} \cdot \left(\ln p + \ln q + \gamma - qc_n - n\right)$$

Die charakteristischen Werte:

Nullstellen:

$$_0c_n = \frac{\ln p + \ln q + \gamma - n}{q}$$

Schnittpunkt y- Achse:

$$_yc_n = \frac{\ln p + \ln q + \gamma - n}{q^{n+2}}$$

Minimum:

$$P_{\mathrm{E}}\left(\frac{\ln p + \ln q + \gamma - n + 1}{q}; -\frac{p}{q^{n+2}} \cdot e^{-(\ln p + \ln q + \gamma - n + 1)}\right)$$

Wendestelle:

$$P_{\mathrm{W}}\left(\frac{\ln p + \ln q + \gamma - n + 2}{q}; -\frac{2p}{q^{n+2}} \cdot e^{-(\ln p + \ln q + \gamma - n + 2)}\right)$$

Flächenintegral:

$$\int\limits_{0_n}^{\infty} .. \int\limits_{0_3}^{\infty}\int\limits_{0_2}^{\infty}\int\limits_{0_1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} zdtdc_1dc_2dc_3...dc_n = \frac{p}{q^{n+3}} \cdot \left(\ln p + \ln q + \gamma - n - 1\right)$$

Folgendes Integral:

$$\int\limits_{0_{n+1}}^{\infty}\int\limits_{0_n}^{\infty} .. \int\limits_{0_3}^{\infty}\int\limits_{0_2}^{\infty}\int\limits_{0_1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} zdtdc_1dc_2dc_3...dc_nd_{n+1} = \frac{p}{q^{n+4}} \cdot \left(\ln p + \ln q + \gamma - n - 2\right)$$

Die notwendige Zentrierung erfolgt durch:

$$\Psi\left(c, n, p, q\right) = \frac{p}{q^{n+2}} \cdot e^{-qc_n} \cdot \left(\ln p + \ln q + \gamma - qc_n - n\right) + e^{-\frac{\ln p + \ln q + \gamma - n + 1}{q}}$$

mit:

$$c_n = c + \frac{\ln p + \ln q + \gamma - n + 1}{q}$$

Die anfänglich umfangreiche Berechnungsgrundlage ergibt nach der Vereinfachung eine überraschend einfache Lösung:

$$\Psi\left(c, n, q\right) = q^{-(n+3)} \cdot e^{n-\gamma-1} \cdot \left(1 - e^{-qc} \cdot \left(qc + 1\right)\right)$$

Bemerkenswert ist das Wegfallen des Wertes p. Das ist möglich über drei Fälle:

- $p = 1$: Für diesen Fall der Konstantierung des Wertes p ist p zwar noch vorhanden, erscheint jedoch formal nicht in der Berechnungsgrundlage. Der an p angekoppelte Term bleibt unverändert erhalten.
- $p = 0$: Für diesen Fall der Konstantierung des Wertes p ist p samt angeschlossenem Term völlig aus der Berechnungsgrundlage eliminiert.
- $p = -1$: Für diesen Fall der Konstantierung des Wertes p ist p noch vorhanden, erscheint jedoch formal nicht in der Berechnungsgrundlage. Der an p angekoppelte Term bleibt unverändert, jedoch negativiert erhalten.

Die Taylor- Entwicklung des zentrierten Rumpfpotentials wird durchgeführt:

$$\Psi\left(c,n,q\right)=q^{-(n+3)}\cdot e^{n-\gamma-1}\cdot\left(1-e^{-qc}\cdot\left(qc+1\cdot\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$\Psi_0\left(c,q\right)=1-e^{-qc}\cdot\left(qc+1\right)$$

$\Rightarrow$

$$\Psi_0\left(c,q\right)=\frac{1}{2}\left(qc\right)^2-\frac{1}{3}\left(qc\right)^3+\frac{1}{8}\left(qc\right)^4-\frac{1}{30}\left(qc\right)^5+\frac{1}{144}\left(qc\right)^6-\frac{1}{840}\left(qc\right)^7+\frac{1}{5760}\left(qc\right)^8+...$$

Damit steht das Ersatzsystem des Feder- Masse- Schwingers fest:

$$\Psi^{\bullet}\left(c,n,q\right)=q^{-(n+3)}\cdot e^{n-\gamma-1}\cdot\frac{1}{2}\left(qc\right)^2=q^{-(n+1)}\cdot e^{n-\gamma-1}\cdot\frac{c^2}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial c}\Psi^{\bullet}\left(c,n,q\right)=q^{-(n+1)}\cdot e^{n-\gamma-1}\cdot c$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0=\sqrt{q^{-(n+1)}\cdot e^{n-\gamma-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{f}_0\left(n\right)=\frac{f_0\left(n\right)}{f_0\left(0\right)}=\sqrt{\left(q^{-1}e^1\right)^n}=\left(q^{-1}e^1\right)^{\frac{n}{2}}\rightarrow\quad\bar{\bar{f}}_0=\frac{f_0\left(n\right)}{f_0\left(n-1\right)}=\sqrt{q^{-1}e^1}$$

Für die Bewegungsdifferentialgleichung gilt somit:

$$c''+\omega_0^2c=0$$

Konsequenz der Bewegungsdifferentialgleichung ist es, dass sämtliche Erkenntnisse der Eigenfrequenzen und der Konsequenzen für n weiterhin gültig sind, der Wert q lediglich die Grundfrequenz ω_0 des Systems ändert.

Bleibt die Anharmonizität zu überprüfen:

$$e^{\bar{\chi}}=\frac{1}{1}q^1c^0-\frac{1}{1}q^2c^1+\frac{1}{2}q^3c^2-\frac{1}{6}q^4c^3+\frac{1}{24}q^5c^4-\frac{1}{120}q^6c^5+\frac{1}{720}q^7c^6+...$$

$\Rightarrow$

$$e^{\bar{\chi}}\left(c;q\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{q^{n+1}c^n}{n!}$$

$\Rightarrow$

$$e^{\bar{\chi}}\left(c;q\right)=qe^{-qc}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{\chi}\left(c;q\right)=\ln q-qc$$

Die Teilanharmonizitäten:

$$\bar{\chi}_n=\frac{\left(-1\right)^n}{n!}\cdot q^{n+1}$$

Die Quantelung von n soll wieder gefunden werden:

$$n=e^{-\bar{\chi}}=e^{qc-\ln q}=\frac{1}{q}\cdot e^{qc}$$

$\Rightarrow$

$$c=\frac{1}{q}\cdot\ln\left(qn\right)$$

Bleibt die Untersuchung der Potentialstufenentwicklung, damit die Festlegungen der Eigenfrequenzen gültig werden. Die Potentialstufen, an der die Eigenfrequenzen liegen:

$$\Psi_0\left(c,q\right)=1-e^{-qc}\cdot\left(qc+1\right)$$

$\Rightarrow$

$$\Psi_0\left(n,q\right)=1-e^{-\ln(qn)}\cdot\left(\ln\left(qn\right)+1\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\Psi_0\left(n,q\right) = 1 - \frac{\ln\left(qn\right)+1}{qn}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \Psi_0\left(n,q\right) = 1$$

Die Differenz der Potentialstufen:

$$_{n-1}\bar{\Psi}_0\left(n,q\right) = {}_n\Psi_0\left(n\right) - {}_{n-1}\Psi_0\left(n\right) = \frac{\ln\frac{q^n(n-1)^n}{q^{(n-1)}n^{(n-1)}}+1}{q\left(n-1\right)n}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} {}_{n-1}\bar{\Psi}_0\left(n,q\right) = 0$$

Die Untersuchung der maximalen Energie des Potentiales:

$$\Psi\left(c,n,q\right) = q^{-(n+3)}\cdot e^{n-\gamma-1}\cdot\big(1-e^{-qc}\cdot\left(qc+1\right)\big)$$

$\Rightarrow$

$$E_{\text{Max}}\left(n,q\right) = q^{-(n+3)}\cdot e^{n-\gamma-1} = q^{-(n+3)}\cdot E_{\text{Max}}\left(n\right)$$

$\Rightarrow$

$$\overline{E_{\text{Max}}}\left(n,q\right) = \frac{E_{\text{Max}}\left(n,q\right)}{E_{\text{Max}}\left(0,q\right)} = q^{-n}e^n = \left(\frac{e^1}{q}\right)^n = \frac{\overline{E_{\text{Max}}}\left(n\right)}{q^n}$$

$\Rightarrow$

$$\overline{\overline{E_{\text{Max}}}}\left(q\right) = \frac{E_{\text{Max}}\left(n,q\right)}{E_{\text{Max}}\left(n-1,q\right)} = q^{-1}e^1 = \frac{e^1}{q} = \frac{\overline{\overline{E_{\text{Max}}}}}{q}$$

LaTeX 2_ε