Methomatica
Gesamtausgabe - Blatt 01 – 21

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

01. November 1996 – Letzte Revision: 7. April 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Göh87] Wilhelm Göhler. Höhere Mathematik - Formeln und Hinweise -. Leipzig, 1987. 10. Auflage.

1 Einleitung

1.1 Vorwort

Das hier vorliegende Teilprojekt **Methomatica** ist ein Teil des Projektes **Protel**. Dort hilft es, Laufzeitlängen von verschiedenen Protellaufformen zu ermitteln. Daher ist es verständlich, dass sich Methomatica nicht in den Möglichkeiten der Differentialgeometrie erschöpfen wird, kann und muss. [Göh87] ff.

Bei der Nutzung von Tafel- und Formelwerken tritt jedoch ein entscheidener Nachteil auf. Will man zum Beispiel den Radius eines Funktiongrafen berechnen, so ist jede Menge Vorarbeit vonnöten, um letztendlich zum Ergebnis zu gelangen – 2. Ableitung bilden und die dritte Potenz des Bogenlängendifferentials ermitteln – letzteres wiederum nur bestimmbar, wenn man das Quadrat der 1. Ableitung zur Verfügung hat.

Hier setzt die vorliegende Sammlung differentialgeometrischer Berechnungsgrundlagen an. Egal wo man in die Methode einsteigt, es sind nur die Formfaktoren a und b nötig um den gewünschten Wert zu ermitteln.

Für den reibungslosen Ablauf der Berechnung am Protel war eine Konvertierung vom allgemeinen zum speziellen Fall eines Funktionsgrafen unbedingt nötig. Dies ging jedoch nicht ohne Kompromisse ab. Die Begrenzung auf ausgewählte, für Protel zugeschnittene Figuren und die Einführung von Formfaktoren war nötig. Letztendlich aber auch die Ablösung des allgemeinen Falls von der Funktionsgleichnung bis zum Evolutenwinkel auf den speziellen Fall für den Punkt $P\,(x; y)$.

Folgende Funktionsfiguren wurden aufgenommen.

- Kreis – Methode C/H
- Kreissegment – Methode C/S
- Ellipse – Methode E
- Parabel – Methode P
- Dreieck - Methode T

Ein Teil der Berechnungsgrundlagen hat recht beachtliche Maße in Form und Fülle. Methode C/S und P besitzen solche mit seitenfüllenden Dimensionen. Deshalb wurde methodisch daher Metho... an die Entwicklung der Gleichungen herangegangen.

Konsequenz, die Einführung von 4 Gruppen.

- normiert
- quasinormiert
- quasireal
- real

Jetzt kann man von normiert bis real das Anwachsen der Berechnungsgrundlagen recht gut einsehen und verstehen, zum Beispiel die **Ellipse mit ihrer Bogenlänge**.

$$s := \pi \to s := \frac{1}{2}\pi\, b \to s \approx \frac{1}{2}\pi\,(a+1)\left(1+\frac{1}{4}\,\frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}\right)$$

$$\to s \approx \frac{1}{2}\pi\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(1+\frac{1}{4}\,\frac{\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2}{\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2}\right)$$

Auch dies hatte folgende Überlegung zugrunde. Einerseits ist es eines Mathematikers Pflicht, ein Endergebnis zum finalen Umstellungsende **FUE** zu vereinfachen, andererseits stand gerade eben dies der Übersichtlichkeit im Wege. Deshalb sind einige, viele Gleichungen in zwei oder mehr Schreibweisen dargestellt, obwohl manchmal so isoliert dastehend, dies nicht unbedingt nötig ist, wie zum Beispiel Ellipse real Abschnitt Bogendifferential

$$ds2 := 1 + \frac{a^2 (b - 2x)^2}{b^2 \left(b x - x^2\right)} = \frac{-4 a x (a b - x) + b^2 \left(b x - x^2\right) + a^2 b^2}{b^2 \left(b x - x^2\right)}$$

Zweiter Term liefert dann den Querverweis zum Quadratbogendifferential gleicher geometrischer Figur. Dritter Term für die Bogenlänge Ellipse quasireal. Für eine bessere Übersichtlichkeit wurde bei manchen Gleichungen daher auch völlig auf das FUE verzichtet.

Eine letzte Besonderheit soll nun noch erläutert werden. Bei einigen Berechnungsgrundlagen stehen neben den Gleichungen absolute Zahlen, obwohl diese in einem Tafelwerk nichts zu suchen haben. Nun, bei normierten Figuren sind die Formfaktoren a und b festgelegt, daher kann man dort zum FUE schreiten. Der Kreis normiert ist ein Beispiel dafür. Bei allen anderen wurde der Evolentenwinkel als Absoluta hinzugefügt, wobei der Punkt $P\,(x; y)$ und die Formfaktoren, entnehmbar aus der Grafik des dazugehörigen Abschnitts, als gegebene Größen anzusehen sind.

Eine kleine Sonderstellung besitzt auch der Abschnitt Bogenlänge. Im Gegensatz zu allen anderen Berechnungsgrundlagen, ist dort der Integrationsweg mit Substitution, Integrandenumformung und all den anderen Zwischenschritten aufgeführt.

Für den gediegenen Leser sei noch gesagt.

- Entwicklungszeitraum November 1996 bis April 1999
- etwa 450 Stunden Erstellzeit
- zweimal überprüfte Ergebnisse

... und dennoch:

Fehler stecken jedoch im Detail, auch wenn es nur beim Schreiben in den Formeleditor war. Wer dies schon einmal getan und nochmal die Grundlagen der Methode C/S anschaut, weiß wovon hier geschrieben wird.

1.2 Begriffserklärungen und Substitutionen

Normierungsbegriff

- Als **normiert** wird *hier* eine geometrische Figur dann bezeichnet, wenn gilt:

$$a = 1 \qquad\qquad b = 2$$

- Als **quasinormiert** wird *hier* eine geometrische Figur dann bezeichnet, wenn gilt:

$$a = \text{variabel} \qquad\qquad \text{mit} \qquad\qquad 0 < a < \infty$$

  Für den Koeffizienten b gilt unabhängig von der Methode:

$$b = 2$$

- Als **quasireal** wird *hier* eine geometrische Figur dann bezeichnet, wenn gilt:

$$b = \text{variabel} \qquad\qquad \text{mit} \qquad\qquad 0 < b < \infty$$

  Für den Koeffizienten a gilt abhängig von der Methode:

$$a_{\text{Kreis}} = \frac{b}{2} \qquad a_{\text{Kreissegment}} = 1 \qquad a_{\text{Ellipse}} = \frac{b}{2} \qquad a_{\text{Parabel}} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad a_{\text{Dreieck}} = 1$$

- Als **real** wird *hier* eine geometrische Figur dann bezeichnet, wenn gilt:

$$a = \text{variabel} \qquad\qquad \text{mit} \qquad\qquad 0 < a < \infty$$

$$b = \text{variabel} \qquad\qquad \text{mit} \qquad\qquad 0 < b < \infty$$

  Für den Kreis jedoch ist nur ein

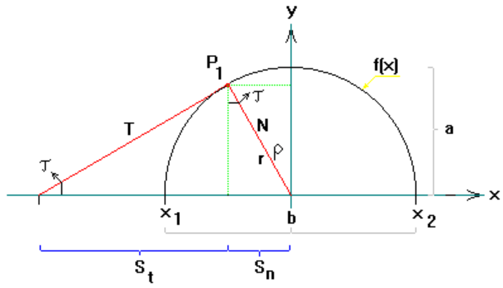
$$a_{\text{Kreis}} = \frac{b}{2}$$

  gültig

Substitutionen (einige Spezialfälle sind allgemeine Fälle anderer Methoden):

• Kreis,	normiert	∼	vorhanden
• Kreis,	quasinormiert	∼	vorhanden als Kreissegment, quasinormiert
• Kreis,	quasireal	∼	vorhanden als **Methode C/H**
• Kreis,	real	∼	vorhanden als Kreissegment, real
• Ellipse,	normiert	∼	vorhanden als Kreis, normiert
• Ellipse,	quasinormiert	∼	vorhanden
• Ellipse,	quasireal	∼	vorhanden als Kreis, quasireal
• Ellipse,	real	∼	vorhanden als **Methode E**
• Kreissegment,	normiert	∼	vorhanden als Kreis, normiert
• Kreissegment,	quasinormiert	∼	vorhanden
• Kreissegment,	quasireal	∼	vorhanden
• Kreissegment,	real	∼	vorhanden als **Methode C/S**
• Parabel,	normiert	∼	vorhanden
• Parabel,	quasinormiert	∼	vorhanden
• Parabel,	quasireal	∼	vorhanden
• Parabel,	real	∼	vorhanden als **Methode P**
• Dreieck,	normiert	∼	vorhanden
• Dreieck,	quasinormiert	∼	vorhanden
• Dreieck,	quasireal	∼	vorhanden
• Dreieck,	real	∼	vorhanden als **Methode T**

2 Funktion, allgemein



Funktionsgleichung:

$$y = f(x)$$

1. Ableitung:

$$dy = f'(x)$$

2. Ableitung:

$$d^2y = f''(x)$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = f'^2(x)$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = f'^2(x) + 1$$

Bogendifferential:

$$ds = \sqrt{f'^2(x) + 1}$$

Bogenlänge:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{f'^2(x) + 1} \cdot dx$$

Krümmung:

$$K = \frac{f''(x)}{\sqrt{f'^2(x) + 1}^3}$$

Radius:

$$\rho = \frac{\sqrt{f'^2(x) + 1}^3}{f''(x)}$$

Normalenfunktionsgleichung für P(x;y):

$$f_N : \eta - y = -\frac{\xi - x}{f'(x)}$$

Tangentenfunktionsgleichung für P(x;y):

$$f_T : \eta - y = f'(x) \cdot (\xi - x)$$

Länge der Normale:

$$N = f(x) \cdot \sqrt{f'^2(x) + 1}$$

Länge der Tangente:

$$T = \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \sqrt{f'^2(x) + 1}$$

Länge der Subnormale:

$$S_N = f(x) \cdot f'(x)$$

Länge der Subtangente:

$$S_T = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Evolute (Lage der Krümmungsmittelpunkte):

$$\xi = x - \frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)} \cdot f'(x) \qquad \eta = f(x) + \frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}$$

Evolvente (Abrollfunktion):

$$\xi = x - s\cos\tau \qquad \eta = f(x) - s\sin\tau$$

Evolventenwinkel:

$$\tau = \arctan f'(x)$$

3 Kreise

3.1 Kreis, normiert

$$a = 1 \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

1. Ableitung:

$$dy = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Bogenlänge:

$$s = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \arcsin x|_{-1}^{+1} = \pi$$

Krümmung:

$$K = -1$$

Radius:

$$\rho = -1$$

Normalenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$f_N = -\sqrt{3}x$$

Tangentenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$f_T = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (x + 2)$$

Länge der Normale für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$N = 1$$

Länge der Tangente für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$T = \sqrt{3}$$

Länge der Subnormale für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$S_N = \frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$S_T = \frac{3}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2 + T^2} = S_N + S_T$$

Evolute:

$$\xi = 0 \qquad \eta = 0$$

Evolvente für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \right) \cos \arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \right) \sin \arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\tan \tau = \frac{\eta}{S_T + S_N + \xi}$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (\xi + 2)$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel:

$$\tan \tau = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\tau = 30^\circ$$

3.2 Kreis, quasinormiert

$$a = \text{var.} \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} + y_m$$

Mit:

$$y_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 1}{a} \qquad r^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot a^2 + \left(a^2 - 1\right)^2}{a^2}$$

1. Ableitung:

$$dy = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Bogenlänge:

$$s = r \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \bigg|_{-1}^{+1}$$

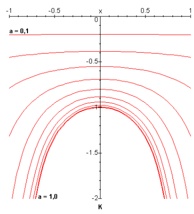
$\Rightarrow$

$$s = 2 \cdot r \cdot \arcsin \frac{1}{r} \quad \text{für} \quad 0 < a \leq r$$

$$s = 2 \cdot r \cdot \left(\pi - \arcsin \frac{1}{r}\right) \quad \text{für} \quad r \leq a \leq 2r$$

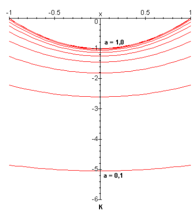
Krümmung:

$$K = -\frac{r}{r^2 - x^2} \rightarrow$$



Radius:

$$\rho = -\frac{r^2 - x^2}{r} \rightarrow$$



Normalenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$f_N = -x \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - 1} + y_m$$

Tangentenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$f_T = \frac{2 \cdot r^2 + x}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}} + y_m$$

Länge der Normale für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$N = r \cdot \left(\frac{2 \cdot y_m}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}} + 1 \right)$$

Länge der Tangente für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$T = r \cdot \left(\sqrt{4 \cdot r^2 - 1} + 2 \cdot y_m \right)$$

Länge der Subnormale für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{y_m}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}}$$

Länge der Subtangente für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$S_T = \frac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot r^2 - 1\right) + y_m \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - 1}$$

Evolute:

$$\xi = 0 \qquad \eta = y_m$$

Evolvente für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(r \cdot \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx \right) \cos \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}} \right)$$

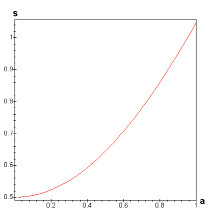
$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - 1} + y_m - \left(r \cdot \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx \right) \sin \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}} \right)$$

$\Leftarrow$

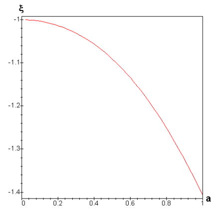
$$\lim_{a \to 0} \left(r \cdot \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx \right) = \lim_{a \to 0} r \cdot \left(\arcsin \frac{1}{r} - \arcsin \frac{1}{2 \cdot r} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{a \to 1} \left(r \cdot \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx \right) = \lim_{a \to 1} r \cdot \left(\arcsin \frac{1}{r} - \arcsin \frac{1}{2 \cdot r} \right) = \frac{1}{3} \cdot \pi$$

$\Leftarrow$



$\Leftarrow$



$\Leftarrow$

$$\xi = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{4 \cdot r^2 - 1} \left(\arcsin\left(\frac{1}{r}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2 \cdot r}\right)\right)\right)$$

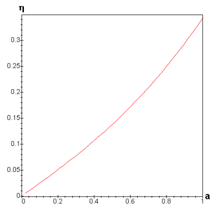
$\Leftarrow$

$$\lim_{a \to 0} \xi = -1 \qquad \lim_{a \to 1} \xi = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi\right)$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{4 \cdot r^2 - 1} + 2 \cdot y_m + \arcsin\left(\frac{1}{2 \cdot r}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{r}\right)\right)$$

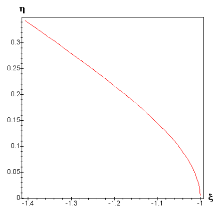
$\Leftarrow$



$\Leftarrow$

$$\lim_{a \to 0} \eta = 0 \qquad \lim_{a \to 1} \eta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi\right)$$

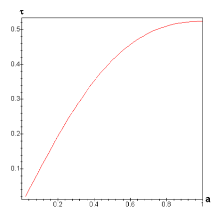
$\Leftarrow$



Evolventenwinkel für P$(-\frac{1}{2}; f(x))$:

$$\tan \tau = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}}$$

$\Leftarrow$



$\Leftarrow$

$$\lim_{a \to 0} \tau = 0 \qquad \lim_{a \to 1} \tau = \frac{1}{6} \cdot \pi$$

3.3 Kreis, quasireal - Methode C/H

$$a = \frac{b}{2} \qquad b = \text{var.}$$

Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{x \cdot (b - x)}$$

1. Ableitung:

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - 2 \cdot x}{\sqrt{x \cdot (b - x)}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{x \cdot (b - x)}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(b - 2 \cdot x)^2}{x \cdot (b - x)}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{(b - 2 \cdot x)^2}{x \cdot (b - x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{x \cdot (b - x)}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{x \cdot (b - x)}}$$

Bogenlänge (für b = 2 gilt dann):

$$s = \frac{b}{2} \cdot \int\limits_0^b \frac{1}{\sqrt{x \cdot (b - x)}} \cdot dx = b \cdot \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4 \cdot z^2}} \cdot dz = \frac{b}{2} \cdot \left(\arcsin \frac{2 \cdot z}{b} \right) \Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$s = \frac{b}{2} \cdot (\arcsin [+1] - \arcsin [-1]) = \frac{b}{2} \cdot \pi = \pi$$

$\Leftarrow$ Substitution

$$x \cdot (b - x) = b \cdot x - x^2 = -\left(x^2 - b \cdot x\right) = -\left[\left(x - \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2}{4} \right] = \frac{b^2}{4} - z^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(b^2 - 4 \cdot z^2\right)$$

$\Leftarrow$

$$z = x - \frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad z\,(0) = -\frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad z\,(b) = +\frac{b}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\frac{dz}{dx} = \left(x - \frac{b}{2} \right)' = 1 \quad \rightarrow \quad dx = dz$$

Krümmung (für b = 2 gilt dann):

$$K = -\frac{2}{b} = -1$$

Radius (für b = 2 gilt dann):

$$\rho = -\frac{b}{2} = -1$$

Normalenfunktionsgleichung für P($+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$f_N = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot b \right) = -\sqrt{3} \cdot (x - 1)$$

Tangentenfunktionsgleichung für P($+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$)und b = 2:

$$f_T = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \cdot b \right) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (x + 1)$$

Länge der Normale für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$N = \frac{b}{2} = 1$$

Länge der Tangente für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$T = b \cdot \frac{\sqrt{x \cdot (b-x)}}{b - 2 \cdot x} = \sqrt{3}$$

Länge der Subnormale für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$S_N = \frac{b}{2} - x = \frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$S_T = 2 \cdot x \cdot \frac{b-x}{b - 2 \cdot x} = \frac{3}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2 + T^2} = S_N + S_T$$

Evolute und b = 2:

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot b = 1 \qquad \eta = 0$$

Evolvente für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$\xi = +\frac{1}{2} - \left(\frac{b}{2} \cdot \int\limits_0^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (b-x)}} \right) \cos\arctan\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \left(\frac{b}{2} \cdot \int\limits_0^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (b-x)}} \right) \sin\arctan\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\tan\tau = \frac{2 \cdot \eta}{S_N + S_T + 2 \cdot \xi}$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (\xi + 1)$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel und b = 2:

$$\tan\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b - 2 \cdot x)}{\sqrt{x \cdot (b-x)}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\tau = 30^\circ$$

3.4 Kreis, real

$$a = \frac{b}{2} \qquad b = \text{var.}$$

Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{x \cdot (b - x)}$$

1. Ableitung:

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - 2 \cdot x}{\sqrt{x \cdot (b - x)}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{x\,(b - x)}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(b - 2 \cdot x)^2}{x \cdot (b - x)}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{(b - 2 \cdot x)^2}{x \cdot (b - x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{x \cdot (b - x)}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{x \cdot (b - x)}}$$

Bogenlänge (für b = 2 gilt dann):

$$s = \frac{b}{2} \cdot \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (b - x)}} = b \cdot \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{dz}{\sqrt{b^2 - 4 \cdot z^2}} = \frac{b}{2} \cdot \left(\arcsin \frac{2 \cdot z}{b} \right) \Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$s = \frac{b}{2} \cdot (\arcsin{[+1]} - \arcsin{[-1]}) = \frac{b}{2} \cdot \pi = \pi$$

$\Leftarrow$ Substitution

$$x \cdot (b - x) = b \cdot x - x^2 = -\left(x^2 - b \cdot x\right) = -\left[\left(x - \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{b^2}{4} \right] = \frac{b^2}{4} - z^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(b^2 - 4 \cdot z^2 \right)$$

$\Leftarrow$

$$z = x - \frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad z\,(0) = -\frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad z\,(b) = +\frac{b}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\frac{dz}{dx} = \left(x - \frac{b}{2} \right)' = 1 \quad \rightarrow \quad dx = dz$$

Krümmung (für b = 2 gilt dann):

$$K = -\frac{2}{b} = -1$$

Radius (für b = 2 gilt dann):

$$\rho = -\frac{b}{2} = -1$$

Normalenfunktionsgleichung für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$f_N = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot b \right) = -\sqrt{3} \cdot (x - 1)$$

Tangentenfunktionsgleichung für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$)und b = 2:

$$f_T = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \cdot b \right) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (x + 1)$$

Länge der Normale für P($+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$N = \frac{b}{2} = 1$$

Länge der Tangente für P($+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$T = b \cdot \frac{\sqrt{x \cdot (b-x)}}{b - 2 \cdot x} = \sqrt{3}$$

Länge der Subnormale für P($+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$S_N = \frac{b}{2} - x = \frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente für P($+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$S_T = 2 \cdot x \cdot \frac{b-x}{b-2 \cdot x} = \frac{3}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2 + T^2} = S_N + S_T$$

Evolute und b = 2:

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot b = 1 \qquad \eta = 0$$

Evolvente für P($+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$\xi = +\frac{1}{2} - \left(\frac{b}{2} \cdot \int\limits_0^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (b-x)}} \right) \cos \arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \left(\frac{b}{2} \cdot \int\limits_0^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (b-x)}} \right) \sin \arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\tan \tau = \frac{2 \cdot \eta}{S_N + S_T + 2 \cdot \xi}$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (\xi + 1)$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel und b = 2:

$$\tan \tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b - 2x)}{\sqrt{x \cdot (b-x)}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\tau = 30^\circ$$

4 Kreissegmente

4.1 Kreissegment, normiert

$$a = 1 \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

1. Ableitung:

$$dy = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Bogenlänge:

$$s = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \arcsin x|_{-1}^{+1} = \pi$$

Krümmung:

$$K = -1$$

Radius:

$$\rho = -1$$

Normalenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$f_N = -\sqrt{3} \cdot x$$

Tangentenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$f_T = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (x + 2)$$

Länge der Normale für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$N = 1$$

Länge der Tangente für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$T = \sqrt{3}$$

Länge der Subnormale für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$S_N = \frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$S_T = \frac{3}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2 + T^2} = S_N + S_T$$

Evolute:

$$\xi = 0 \qquad \eta = 0$$

Evolvente für P$(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$:

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cos \arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\pi \right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) \sin \arctan \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\tan \tau = \frac{\eta}{S_T + S_N + \xi}$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (\xi + 2)$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel:

$$\tan \tau = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\tau = 30^\circ$$

4.2 Kreissegment, quasinormiert

$$a = \text{var.} \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} + y_m$$

Mit:

$$y_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - 1}{a} \qquad r^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot a^2 + \left(a^2 - 1\right)^2}{a^2}$$

1. Ableitung:

$$dy = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Bogenlänge:

$$s = r \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \Big|_{-1}^{+1}$$

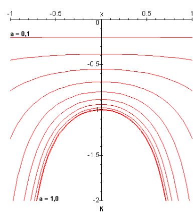
$\Rightarrow$

$$s = 2 \cdot r \cdot \arcsin \frac{1}{r} \quad \text{für} \quad 0 < a \leq r$$

$$s = 2 \cdot r \cdot \left(\pi - \arcsin \frac{1}{r}\right) \quad \text{für} \quad r \leq a \leq 2 \cdot r$$

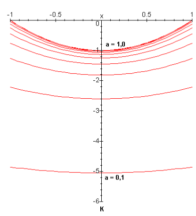
Krümmung:

$$K = -\frac{r}{r^2 - x^2} \rightarrow$$



Radius:

$$\rho = -\frac{r^2 - x^2}{r} \rightarrow$$



Normalenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$f_N = -x\sqrt{4 \cdot r^2 - 1} + y_m$$

Tangentenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$f_T = \frac{2 \cdot r^2 + x}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}} + y_m$$

Länge der Normale für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$N = r \cdot \left(\frac{2 \cdot y_m}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}} + 1\right)$$

Länge der Tangente für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$T = r \cdot \left(\sqrt{4 \cdot r^2 - 1} + 2 \cdot y_m\right)$$

Länge der Subnormale für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{y_m}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}}$$

Länge der Subtangente für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$S_t = \frac{1}{2}\left(4r^2 - 1\right) + y_m\sqrt{4r^2 - 1}$$

Evolute:

$$\xi = 0 \qquad \eta = y_m$$

Evolvente für P($-\frac{1}{2}$; $f\left(x\right)$):

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(r \cdot \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx\right) \cos\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}}\right)$$

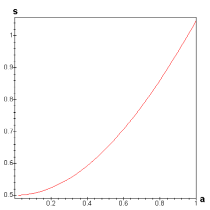
$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - 1} + y_m - \left(r \cdot \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx\right) \sin\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}}\right)$$

$\Leftarrow$

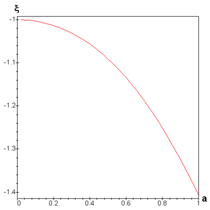
$$\lim_{a\to 0}\left(r \cdot \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx\right) = \lim_{a\to 0} r \cdot \left(\arcsin\frac{1}{r} - \arcsin\frac{1}{2 \cdot r}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{a\to 1}\left(r \cdot \int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx\right) = \lim_{a\to 1} r \cdot \left(\arcsin\frac{1}{r} - \arcsin\frac{1}{2 \cdot r}\right) = \frac{1}{3} \cdot \pi$$

$\Leftarrow$



$\Leftarrow$



$\Leftarrow$

$$\xi = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{4 \cdot r^2 - 1} \left(\arcsin\left(\frac{1}{r}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2 \cdot r}\right)\right)\right)$$

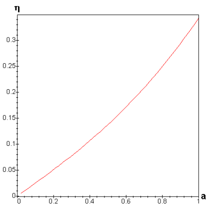
$\Leftarrow$

$$\lim_{a \to 0} \xi = -1 \qquad \lim_{a \to 1} \xi = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi\right)$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{4 \cdot r^2 - 1} + 2 \cdot y_m + \arcsin\left(\frac{1}{2 \cdot r}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{r}\right)\right)$$

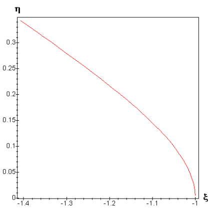
$\Leftarrow$



$\Leftarrow$

$$\lim_{a \to 0} \eta = 0 \qquad \lim_{a \to 1} \eta = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi\right)$$

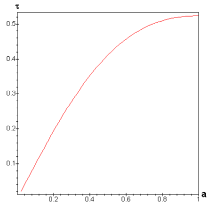
$\Leftarrow$



Evolventenwinkel:

$$\tan \tau = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot r^2 - 1}}$$

$\Leftarrow$



$\Leftarrow$

$$\lim_{a \to 0} \tau = 0 \qquad \lim_{a \to 1} \tau = \frac{1}{6} \cdot \pi$$

4.3 Kreissegment, quasireal

$$a = 1 \qquad b = \text{var.}$$

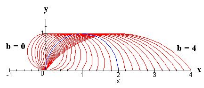
Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} + y_m$$

Mit:

$$x_m = \frac{1}{2} \cdot b \qquad y_m = \frac{1}{8} \cdot \left(4 - b^2\right) = 1 - r \qquad r^2 = \frac{1}{64} \cdot \left(4 + b^2\right)^2$$

$\rightarrow$



1. Ableitung:

$$dy = -\frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{r^2}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{(x - x_m)^2}{r^2 - (x - x_m)^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{(x - x_m)^2}{r^2 - (x - x_m)^2} = \frac{r^2}{r^2 - (x - x_m)^2}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} = \frac{r}{y - y_m}$$

Bogenlänge:

$$s = r \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} = r \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{r^2 - \left(x - \frac{1}{2} \cdot b\right)^2}} = r \int\limits_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

$\Rightarrow$

$$s = r \cdot \left(\arcsin \frac{z}{r}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b}$$

$\Rightarrow$

$$s = 2 \cdot r \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{r}\right) \quad \text{für} \quad r \geq 1$$

$$s = 2 \cdot r \cdot \left(\pi - \arcsin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{r}\right)\right) \quad \text{für} \quad r \leq 1$$

$\Leftarrow$ Substitution

$$z = x - \frac{1}{2} \cdot b \quad \rightarrow \quad z\,(0) = -\frac{1}{2} \cdot b \quad \rightarrow \quad z\,(b) = +\frac{1}{2} \cdot b$$

$\Leftarrow$

$$\frac{dz}{dx} = \left(x - \frac{1}{2} \cdot b\right)' = 1 \quad \rightarrow \quad dz = dx$$

Krümmung:

$$K = -\frac{1}{r}$$

Radius:

$$\rho = -r$$

Normalenfunktionsgleichung für P($+\frac{b}{4}; f(x)$) und b = 2:

$$f_N = \sqrt{16 \cdot r^2 - b^2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{b}\right) + y_m = -\sqrt{3} \cdot (x - 1)$$

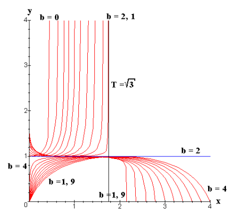
Tangentenfunktionsgleichung für P($+\frac{b}{4}; f(x)$) und b = 2:

$$f_T = \frac{b \cdot x + x_m + 1}{\sqrt{16 \cdot r^2 - b^2}} + y_m = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (x + 1)$$

Länge der Normale für P($+\frac{b}{4}; f(x)$) und b = 2:

$$N = r \cdot \left(1 + \frac{y_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}\right) = 1$$

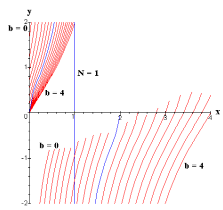
$\rightarrow$



Länge der Tangente für P($+\frac{b}{4}; f(x)$) und b = 2:

$$T = r \cdot \frac{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} + y_m}{x_m - x} = \frac{\sqrt{x \cdot (2 - x)}}{1 - x} = \sqrt{3}$$

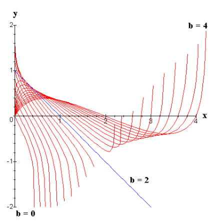
$\rightarrow$



Länge der Subnormale für P($+\frac{b}{4}; f(x)$) und b = 2:

$$S_N = (x_m - x) \cdot \left(1 + \frac{y_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

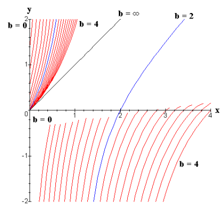
$\rightarrow$



Länge der Subtangente für P($+\frac{b}{4}$; $f(x)$) und b = 2:

$$S_T = x - x_m + \frac{1}{x_m - x} \cdot \left(r^2 + y_m \cdot \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} \right) = \frac{3}{2}$$

$\rightarrow$



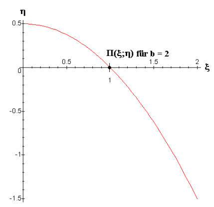
$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2 + T^2} = S_N + S_T$$

Evolute:

$$\xi = x_m = \frac{1}{2} \cdot b \qquad \eta = y_m = \frac{1}{8} \cdot \left(4 - b^2\right) = 1 - r$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$

$$\xi = 1 \qquad \eta = 0$$

Evolvente für P($+\frac{b}{4}$; $f(x)$) und b = 2:

$$\xi = \frac{1}{2} - \left(r \cdot \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} \right) \cos \arctan \left(- \frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} \right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \left(r \cdot \int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} \right) \sin \arctan \left(- \frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} \right)$$

$\Leftarrow$

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot r} \cdot \pi \cdot \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{3} \right) \approx -0,4068...$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{x_m - x}{r} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi \right) \approx 0,3424...$$

$\Leftarrow$

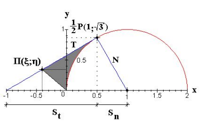
$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (\xi + 1)$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

$\Leftarrow$

$$\tan \tau = \frac{2 \cdot \eta}{S_N + S_T + 2 \cdot \xi}$$

$\rightarrow$



Evolventenwinkel für P($+\frac{b}{4}; f\left(x\right)$) und b = 2:

$$\tan\tau = -\frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - \left(x - x_m\right)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$\Leftarrow$

$$\tau = 30°$$

4.4 Kreissegment, real - Methode C/S

$$a = \text{var.} \qquad b = \text{var.}$$

Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} + y_m$$

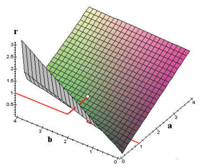
Mit:

$$x_m = \frac{1}{2}b \qquad y_m = \frac{1}{8}\frac{4a^2 - b^2}{a} = a - r \qquad r^2 = \frac{1}{64}\frac{\left(4a^2 + b^2\right)^2}{a^2}$$

$\Leftarrow$

für a = 1 und b = 2:

$\rightarrow$



1. Ableitung:

$$dy = -\frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{(x - x_m)^2}{r^2 - (x - x_m)^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{(x - x_m)^2}{r^2 - (x - x_m)^2} = \frac{r^2}{r^2 - (x - x_m)^2}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} = \frac{r}{y - y_m}$$

Bogenlänge:

$$s = r\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} = r\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - \frac{1}{2}b)^2}} = r\int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

$\Rightarrow$

$$s = r\left(\arcsin\frac{z}{r}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b}$$

$\Rightarrow$

$$s = 2r\arcsin\left(\frac{1}{2}\frac{b}{r}\right) \quad \text{für} \quad r \geq 1$$

$$s = 2r\left(\pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\frac{b}{r}\right)\right) \quad \text{für} \quad r \leq 1$$

$\Leftarrow$

Substitution !

$$z = x - \frac{1}{2}b \quad \rightarrow \quad z(0) = -\frac{1}{2}b \quad \rightarrow z(b) = +\frac{1}{2}b$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx} = \left(x - \frac{1}{2}b\right)' = 1 \quad \rightarrow \quad dz = dx$$

Krümmung:

$$K = -\frac{1}{r}$$

Radius:

$$\rho = -r$$

Normalenfunktionsgleichung für P$\left(+\frac{b}{4}; f(x)\right)$:

$$f_N = \sqrt{16r^2 - b^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{b}\right) + y_m$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$f_N = -\sqrt{3}\,(x-1)$$

Tangentenfunktionsgleichung für P$\left(+\frac{b}{4}; f(x)\right)$:

$$f_T = \frac{br + x_m + 1}{\sqrt{16r^2 - b^2}} + y_m$$

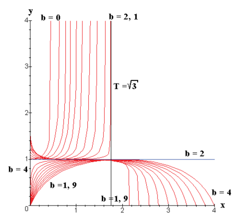
$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$f_T = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,(x+1)$$

Länge der Normale:

$$N = r\left(1 + \frac{y_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}\right)$$

$\rightarrow$



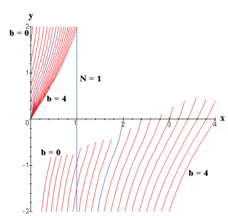
$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$N = 1$$

Länge der Tangente:

$$T = r\frac{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} + y_m}{x_m - x}$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$T = \frac{\sqrt{1-(x-1)^2}}{1-x}$$

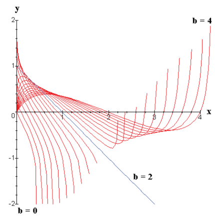
$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{b}{4}; f(x)\right)$:

$$T = \sqrt{3}$$

Länge der Subnormale:

$$S_N = (x_m - x)\left(1 + \frac{y_m}{\sqrt{r^2-(x-x_m)^2}}\right)$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$S_N = (1-x)$$

$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{b}{4}; f(x)\right)$:

$$S_N = \frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente:

$$S_T = x - x_m + \frac{1}{x_m - x}\left(r^2 + y_m\sqrt{r^2-(x-x_m)^2}\right)$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$S_T = x - 1 + \frac{1}{1-x}$$

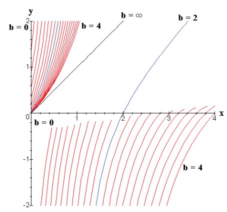
$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{b}{4}; f(x)\right)$:

$$S_T = \frac{3}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2+T^2} = S_N + S_T$$

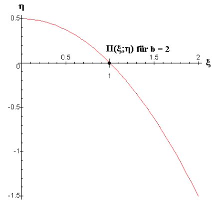
$\rightarrow$



Evolute:

$$\xi = x_m \qquad \eta = y_m$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$\xi = 1 \qquad \eta = 0$$

Evolvente:

$$\xi = x - \, s|_0^z \cos\arctan\left(-\frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}\right)$$

$$\eta = \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} + y_m - \, s|_0^z \sin\arctan\left(-\frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}\right)$$

$\Leftarrow$

$$\xi = x - \, s|_0^z \,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(x - x_m)^2}{r^2 - (x - x_m)^2}}}$$

$$\eta = \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} + y_m + \, s|_0^z \,\frac{\frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}}{\sqrt{1 + \frac{(x - x_m)^2}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}}}$$

$\Leftarrow$

$$\xi = x - \, s|_0^z \,\frac{1}{ds} \qquad \eta = y - \, s|_0^z \,\frac{dy}{ds}$$

$\Leftarrow$
$s|_0^z$ist individuell zu berechnen !

$$\eta = y - dy\,(x - \xi)$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2 und P$\left(+\frac{b}{4}; f\,(x)\right)$:

$$y = \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} + y_m \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{1 - (x - 1)^2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$dy = -\frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} \quad \rightarrow \quad dy = -\frac{x - 1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} \quad \rightarrow \quad dy = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$ds = \frac{r}{y - y_m} \quad \rightarrow \quad ds = \frac{1}{y} \quad \rightarrow \quad ds = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$s|_0^z = r\int\limits_0^{z \le 2} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}} \quad \rightarrow \quad s|_0^z = \int\limits_0^{z \le 2} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} \quad \rightarrow \quad s|_0^z = \frac{1}{3}\pi$$

$\Leftarrow$

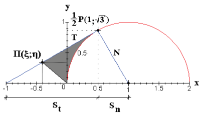
$$\xi = \frac{1}{6}\left(3 - \pi\sqrt{3}\right) \approx -0,4068... \qquad \eta = \frac{1}{6}\left(3\sqrt{3} - \pi\right) \approx +0,3424...$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,(\xi + 1)$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung !

$\rightarrow$



Evolventenwinkel:

$$\tan\tau = -\frac{x - x_m}{\sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}}$$

⇐

für a = 1 und b = 2:

$$\tan\tau = -\frac{x - 1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}}$$

⇐

für P$\left(+\frac{b}{4}; f(x)\right)$:

$$\tan\tau = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

⇐

$$\tan\tau = 30^\circ$$

5 Ellipsen

5.1 Ellipse, normiert

$$a = 1 \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

1. Ableitung:

$$dy = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Bogenlänge:

$$s = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx = \arcsin x|_{-1}^{+1} = \pi$$

Krümmung:

$$K = -1$$

Radius:

$$\rho = -1$$

Normalenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$f_N = -\sqrt{3} \cdot x$$

Tangentenfunktionsgleichung für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$f_T = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (x + 2)$$

Länge der Normale für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$N = 1$$

Länge der Tangente für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$T = \sqrt{3}$$

Länge der Subnormale für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$S_N = \frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$S_T = \frac{3}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2 + T^2} = S_N + S_T$$

Evolute:

$$\xi = 0 \qquad \eta = 0$$

Evolvente für P($-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$):

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \right) \cos \arctan\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi\right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \right) \sin \arctan\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \pi\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\tan \tau = \frac{\eta}{S_T + S_N + \xi}$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (\xi + 2)$$

Aus Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel:

$$\tan \tau = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\tau = 30^\circ$$

5.2 Ellipse, quasinormiert

$$a = \text{var.} \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$y = a \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

1. Ableitung:

$$dy = -\frac{a \cdot x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{a}{\sqrt{1 - x^2}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{a^2 \cdot x^2}{1 - x^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{a \cdot x^2}{1 - x^2} = \frac{\left(a^2 - 1\right) \cdot x^2 + 1}{1 - x^2}$$

Bogendifferential:

$$ds = \sqrt{\frac{(a^2 - 1) \cdot x^2 + 1}{1 - x^2}}$$

Bogenlänge:

$$s = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{(a^2 - 1) \cdot x^2 + 1}{1 - x^2}} dx$$

$\rightarrow$

Elliptisches Integral, nur Näherung

$\Rightarrow$

$$s = \frac{\pi}{2} \cdot (4 + a) \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \cdot \lambda^2 + \frac{1}{64} \cdot \lambda^4 + \frac{1}{256} \cdot \lambda^6 + \frac{25}{16384} \lambda^8 + ...\right] \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{1 - a}{1 + a}$$

$\Leftarrow$

$$s = \frac{\pi}{2} \cdot (1 + a) \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \cdot \lambda^2\right]$$

für schwach exzentrische Ellipse

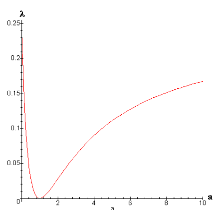
$\rightarrow$

Anteil der ersten vier Terme

Term^2

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1 - a}{1 + a}\right)^2$$

$\rightarrow$



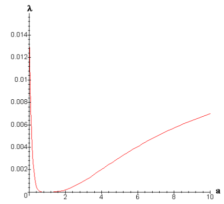
$\longleftarrow$

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \to \infty}} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Term^4

$$\frac{1}{64} \cdot \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^4$$

$\longrightarrow$



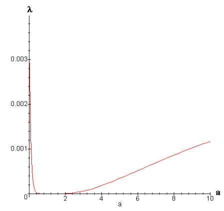
$\longleftarrow$

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \to \infty}} \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^4 = \frac{1}{64}$$

Term^6

$$\frac{1}{256} \cdot \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^6$$

$\longrightarrow$



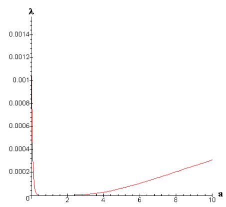
$\longleftarrow$

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \to \infty}} \frac{1}{256} \cdot \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^6 = \frac{1}{256}$$

Term^8

$$\frac{25}{16384} \cdot \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^8$$

$\longrightarrow$



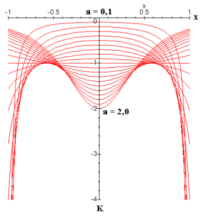
$\longrightarrow$

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \to \infty}} \frac{25}{16384} \cdot \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^8 = \frac{25}{16384}$$

Krümmung:

$$K = -\frac{a}{\sqrt{(a^2-1)\cdot x^2+1}^3}$$

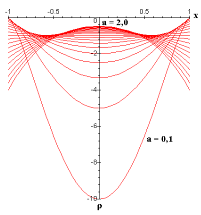
$\rightarrow$



Radius:

$$\rho = -\frac{\sqrt{(a^2-1)\cdot x^2+1}^3}{a}$$

$\rightarrow$



Normalenfunktionsgleichung:

$$f_N = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{a}\cdot\left(2\cdot x - a^2 + 1\right)$$

Tangentenfunktionsgleichung:

$$f_T = \frac{1}{3}\cdot a\cdot\sqrt{3}\cdot(x+2)$$

Länge der Normale:

$$N = \sqrt{x^2\cdot a^2\cdot(a^2-1)+a^2}$$

Länge der Tangente:

$$T = -\frac{\sqrt{(a^2-1)\cdot x^2+1}}{x}\cdot\sqrt{1-x^2}$$

Länge der Subnormale:

$$S_N = -a^2\cdot x$$

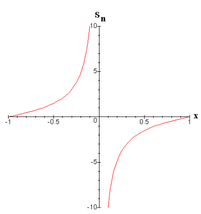
Länge der Subtangente:

$$S_T = \frac{x^2-1}{x}$$

$\rightarrow$

Unabhängig von „a“

$\rightarrow$



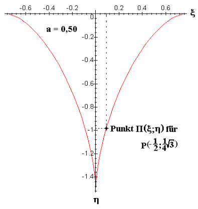
$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2+T^2} = S_N + S_T$$

Evolute:

$$\xi = \left(1-a^2\right)x^3 \qquad \eta = \frac{\left(a^2-1\right)}{a}\sqrt{1-x^2}^3$$

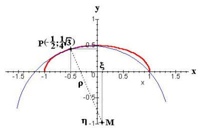
$\rightarrow$



$\Rightarrow$
für P($-\frac{1}{2}$; $\frac{a}{2}\sqrt{3}$) und z. B. a = 0,50

$$\xi \approx -0,0937... \qquad \eta \approx -0,9742...$$

$\rightarrow$



Evolvente für P($-\frac{1}{2}$; $\frac{a}{2}\sqrt{3}$):

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} ds \cdot dx\right) \cos\arctan\left(\frac{a}{3}\cdot\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2} - s\cdot|_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+a^2}}$$

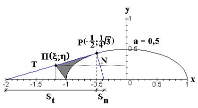
$$\eta = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} ds \cdot dx\right) \sin\arctan\left(\frac{a}{3}\cdot\sqrt{3}\right) = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} - s\cdot|_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{a}{\sqrt{3+a^2}}$$

$\Leftrightarrow$
$s\cdot|_{-1}^{-\frac{1}{2}}$ ist individuell zu berechnen, z. B. für a = 0, 50

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} ds \cdot dx\right) \cos\arctan\left(\frac{a}{3}\cdot\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2} - 0,705\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+0,25}} = -1,177...$$

$$\eta = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} ds \cdot dx\right) \sin\arctan\left(\frac{a}{3}\cdot\sqrt{3}\right) = \frac{0,5}{2}\cdot\sqrt{3} - 0,705\cdot\frac{0,5}{\sqrt{3+0,25}} = 0,237...$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}\cdot(\xi+2)$$

Aus Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel für P($-\frac{1}{2}$; $\frac{a}{2}\sqrt{3}$):

$$\tan\tau = -\frac{a\cdot x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot a$$

5.3 Ellipse, quasireal

$$a = \frac{b}{2} \qquad\qquad b = \text{var.}$$

Funktionsgleichung:

$$y = \sqrt{x \cdot (b - x)}$$

1. Ableitung:

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - 2 \cdot x}{\sqrt{x \cdot (b - x)}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{x \cdot (b - x)}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(b - 2 \cdot x)^2}{x \cdot (b - x)}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{(b - 2 \cdot x)^2}{x \cdot (b - x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{x \cdot (b - x)}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{x \cdot (b - x)}}$$

Bogenlänge (für b = 2 gilt dann):

$$s = \frac{b}{2} \cdot \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{x\,(b - x)}} = b \cdot \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{dz}{\sqrt{b^2 - 4 \cdot z^2}} = \frac{b}{2} \cdot \left(\arcsin \frac{2 \cdot z}{b}\right)\Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$s = \frac{b}{2} \cdot (\arcsin[+1] - \arcsin[-1]) = \frac{b}{2} \cdot \pi = \pi$$

$\Leftarrow$
Substitution

$$x \cdot (b - x) = b \cdot x - x^2 = -\left(x^2 - b \cdot x\right) = -\left[\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}\right] = \frac{b^2}{4} - z^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(b^2 - 4 \cdot z^2\right)$$

$\Leftarrow$

$$z = x - \frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad z\,(0) = -\frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad z\,(b) = +\frac{b}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\frac{dz}{dx} = \left(x - \frac{b}{2}\right)' = 1 \quad \rightarrow \quad dx = dz$$

Krümmung (für b = 2 gilt dann):

$$K = -\frac{2}{b} = -1$$

Radius (für b = 2 gilt dann):

$$\rho = -\frac{b}{2} = -1$$

Normalenfunktionsgleichung für P($+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$f_N = -\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot b\right) = -\sqrt{3} \cdot (x - 1)$$

Tangentenfunktionsgleichung für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$)und b = 2:

$$f_T = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\cdot b\right) = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot(x+1)$$

Länge der Normale für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$N = \frac{b}{2} = 1$$

Länge der Tangente für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$T = b\cdot\frac{\sqrt{x\cdot(b-x)}}{b-2\cdot x} = \sqrt{3}$$

Länge der Subnormale für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$S_N = \frac{b}{2} - x = \frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$S_T = 2\cdot x\cdot\frac{b-x}{b-2\cdot x} = \frac{3}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2+T^2} = S_N + S_T$$

Evolute und b = 2:

$$\xi = \frac{1}{2}\cdot b = 1 \qquad\qquad \eta = 0$$

Evolvente für P($+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$) und b = 2:

$$\xi = +\frac{1}{2} - \left(\frac{b}{2}\cdot\int\limits_0^{+\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x\cdot(b-x)}}\right)\cos\arctan\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\right)$$

$$\eta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} - \left(\frac{b}{2}\cdot\int\limits_0^{+\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x\cdot(b-x)}}\right)\sin\arctan\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\cdot\pi\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\tan\tau = \frac{2\cdot\eta}{S_N + S_T + 2\cdot\xi}$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot(\xi+1)$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel und b = 2:

$$\tan\tau = \frac{1}{2}\cdot\frac{(b-2\cdot x)}{\sqrt{x\cdot(b-x)}} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\tau = 30^\circ$$

5.4 Ellipse, real - Methode E

$$a = \text{var.} \qquad b = \text{var.}$$

Funktionsgleichung:

$$y = 2\frac{a}{b}\sqrt{x\,(b-x)}$$

1. Ableitung:

$$dy = \frac{a}{b}\frac{b-2x}{\sqrt{x\,(b-x)}}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -\frac{1}{2}\frac{ab}{\sqrt{x\,(b-x)}^3}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{a^2}{b^2}\frac{(b-2x)^2}{x\,(b-x)}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{(b-2x)^2}{x\,(b-x)}$$

Bogendifferential:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{(b-2x)^2}{x\,(b-x)}}$$

Bogenlänge:

$$s = \int\limits_0^b \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{(b-2x)^2}{x\,(b-x)}}\,dx$$

$\rightarrow$

Elliptisches Integral, nur Näherung !

$\Rightarrow$

$$s = \frac{\pi}{4}(b+2a)\left[1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{64}\lambda^4 + \frac{1}{256}\lambda^6 + \frac{25}{16384}\lambda^8 + \ldots\right] \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{b-2a}{b+2a}$$

$\Leftarrow$

$$s = \frac{\pi}{4}(b+2a)\left[1 + \frac{1}{4}\lambda^2\right]$$

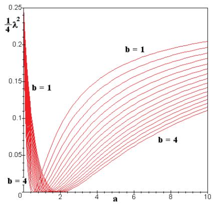
für schwach exzentrische Ellipse

$\rightarrow$

Anteil des ersten Terms:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{b-2a}{b+2a}\right)^2$$

$\rightarrow$



$\leftarrow$

$$\lim_{\substack{b \to 0 \\ b \to +\infty}} \frac{1}{4}\left(\frac{b-2a}{b+2a}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\frac{b-2a}{b+2a}\right)^2 = 0$$

ohne Exzentrizität, entspricht dem Kreis

$\rightarrow$

$$s = \frac{\pi}{4}(b+2a) = \pi$$

Krümmung:

$$K = -\frac{1}{2}\frac{ab}{\sqrt{x(b-x) + \frac{a^2}{b^2}(b-2x)^2}^3}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

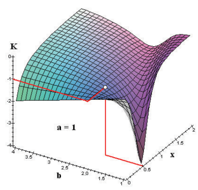
$$K = -\frac{1}{\sqrt{x(2-x) + (1-x)^2}^3}$$

$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$K = -1$$

entspricht dem Kreis

$\rightarrow$



Radius:

$$\rho = -2\frac{\sqrt{x(b-x) + \frac{a^2}{b^2}(b-2x)^2}^3}{ab}$$

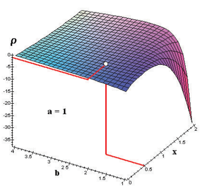
$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$\rho = -\sqrt{x(2-x) + (1-x)^2}^3$$

$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$\rho = -1$$

$\rightarrow$



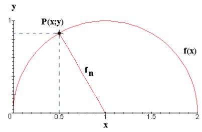
Normalenfunktionsgleichung für P$\left(+\frac{1}{2}; y\right)$:

$$f_N = \frac{1}{4}\frac{a}{b}\sqrt{2b-1}\left(4 - \frac{b^2}{a^2\,(b-1)}\,(2x-1)\right)$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$f_N = -\sqrt{3}\,(x-1)$$

$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:



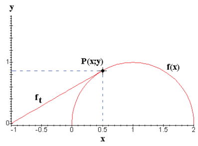
Tangentenfunktionsgleichung für P$\left(+\frac{1}{2}; y\right)$:

$$f_T = \frac{a}{b}\sqrt{2b-1}\left(\frac{b-1}{2b-1}\,(2x-1)+1\right)$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$f_T = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,(x+1)$$

$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:



Länge der Normale

$$N = 2\frac{a}{b}\sqrt{x\,(b-x) + \frac{a^2}{b^2}\,(b-2x)^2}$$

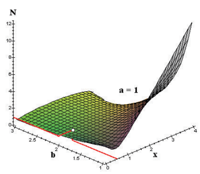
$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$N = \sqrt{x\,(2-x) + (1-x)^2}$$

$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$N = 1$$

$\rightarrow$



Länge der Tangente:

$$T = 2\frac{x\,(b-x)}{b-2x}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{(b-2x)^2}{x\,(b-x)}}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$T = \frac{x\,(2-x)}{1-x}\sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{x\,(2-x)}}$$

$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$T=\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{N}{T}=\frac{a}{b}\frac{b-2x}{\sqrt{x\,(b-x)}} \quad\rightarrow\quad \frac{N}{T}=\frac{1-x}{\sqrt{x\,(2-x)}} \quad\rightarrow\quad \frac{N}{T}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Länge der Subnormale:

$$S_N=2\frac{a^2}{b^2}\,(b-2x)$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$S_N=1-x$$

$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$S_N=\frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente:

$$S_T=2\frac{x\,(b-x)}{b-2x}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$S_T=\frac{x\,(2-x)}{1-x}$$

$\Leftarrow$
für P$\left(+\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$S_T=\frac{3}{2}$$

$\rightarrow$

$$S_NS_T=4\frac{a^2}{b^2}x\,(b-x) \quad\rightarrow\quad S_NS_T=x\,(2-x) \quad\rightarrow\quad S_NS_T=\frac{3}{4}$$

$\rightarrow$

$$\frac{S_N}{S_T}=\frac{a^2}{b^2}\frac{(b-2x)^2}{x\,(b-x)} \quad\rightarrow\quad \frac{S_N}{S_T}=\frac{(1-x)^2}{x\,(2-x)} \quad\rightarrow\quad \frac{S_N}{S_T}=\frac{1}{3}$$

$\rightarrow$

$$\frac{S_N}{S_T}=\left(\frac{N}{T}\right)^2$$

$\rightarrow$

$$\sqrt{N^2+T^2}=S_N+S_T$$

$\rightarrow$

$$T=\sqrt{S_T\,(S_T+S_N)}$$

$\rightarrow$

$$N=\sqrt{S_N\,(S_N+S_T)}$$

$\rightarrow$

$$S_N=\frac{T^2-S_T^2}{S_T}$$

$\rightarrow$

$$S_T=\frac{N^2-S_N^2}{S_N}$$

Evolute:

$$\xi=x+2\frac{b-2x}{b^2}\left(x\,(b-x)+\frac{a^2}{b^2}\,(b-2x)^2\right)$$

$$\eta=2\frac{a}{b}\sqrt{x\,(b-x)}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(x\,(b-x)+\frac{a^2}{b^2}\,(b-2x)^2\right)\right]$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$\xi = 1 \qquad \eta = 0$$

Evolvente für P$\left(+\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$\xi = x - s|_0^{\frac{b}{4}} \cos\arctan\frac{a}{b}\frac{b-2x}{\sqrt{x\,(b-x)}} = x - s|_0^{\frac{b}{4}}\ \frac{1}{ds}$$

$$\eta = 2\frac{a}{b}\sqrt{x\,(b-x)} - s|_0^{\frac{b}{4}} \sin\arctan\frac{a}{b}\frac{b-2x}{\sqrt{x\,(b-x)}} = y - s|_0^{\frac{b}{4}}\ \frac{dy}{ds}$$

$\Leftrightarrow$
$s|_0^{\frac{b}{4}}$ ist individuell zu berechnen:
z. B. a = 0, 5 und b = 2:

$$y = 2\frac{a}{b}\sqrt{x\,(b-x)} \quad\rightarrow\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{x\,(2-x)} \quad\rightarrow\quad y = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

$\rightarrow$

$$dy = \frac{a}{b}\frac{b-2x}{\sqrt{x\,(b-x)}} \quad\rightarrow\quad dy = \frac{1}{2}\frac{1-x}{\sqrt{x\,(2-x)}} \quad\rightarrow\quad dy = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

$\rightarrow$

$$ds = \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\frac{(b-2x)^2}{x\,(b-x)}} \quad\rightarrow\quad ds = \sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{(1-x)^2}{x\,(2-x)}} \quad\rightarrow\quad ds = \frac{1}{6}\sqrt{39}$$

$\rightarrow$

$$s = \int_0^{\frac{b}{4}} ds dx \quad\rightarrow\quad s = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{(1-x)^2}{x\,(2-x)}}dx \quad\rightarrow s \approx 0,7049\ldots$$

$\Leftarrow$

$$\xi = 1 - 0,7049\ldots\frac{2}{13}\sqrt{39} \approx -0,177\ldots$$

$$\eta = \frac{1}{4}\sqrt{3} - 0,7049\ldots\frac{1}{13}\sqrt{13} = 0,237\ldots$$

$\Leftrightarrow$
$s|_0^{\frac{b}{4}}$ ist individuell zu berechnen:
z. B. a = 1 und b = 2:

$$y = 2\frac{a}{b}\sqrt{x\,(b-x)} \quad\rightarrow\quad y = \sqrt{x\,(2-x)} \quad\rightarrow\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$\rightarrow$

$$dy = \frac{a}{b}\frac{b-2x}{\sqrt{x\,(b-x)}} \quad\rightarrow\quad dy = \frac{1-x}{\sqrt{x\,(2-x)}} \quad\rightarrow\quad dy = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$\rightarrow$

$$ds = \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\frac{(b-2x)^2}{x\,(b-x)}} \quad\rightarrow\quad ds = \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{x\,(2-x)}} \quad\rightarrow\quad ds = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$\rightarrow$

$$s = \int_0^{\frac{b}{4}} ds dx \quad\rightarrow\quad s = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{x\,(2-x)}}dx \quad\rightarrow\quad s = \frac{1}{3}\pi$$

$\Leftarrow$

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\pi\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\left(3-\pi\sqrt{3}\right) \approx -0,4068\ldots$$

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi\frac{1}{2}\sqrt{3}\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\left(3\sqrt{3}-\pi\right) \approx +0,3424\ldots$$

$\Rightarrow$

$$\eta = 2\frac{a}{b}\left[\sqrt{x\,(b-x)} - \frac{1}{2}\,(x-\xi)\,\frac{b-2x}{\sqrt{x\,(b-x)}}\right]$$

$\Leftarrow$
für a = 0, 5 und b = 2:

$$\eta = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x\,(2-x)} - (x-\xi)\,\frac{1-x}{\sqrt{x\,(2-x)}}\right]$$

$\Leftarrow$
für $\mathrm{P}\left(+\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$\eta = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,(\xi+1)$$

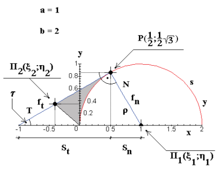
$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$\eta = \sqrt{x\,(2-x)} - (x-\xi)\,\frac{1-x}{\sqrt{x\,(2-x)}}$$

$\Leftarrow$
für $\mathrm{P}\left(+\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$\eta = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,(\xi+1)$$

$\rightarrow$



Evolventenwinkel:

$$\tan\tau = \frac{a}{b}\,\frac{b-2x}{\sqrt{x\,(b-x)}}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$\tan\tau = \frac{1-x}{\sqrt{x\,(2-x)}}$$

$\Leftarrow$
für $\mathrm{P}\left(+\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$\tan\tau = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$\Leftarrow$

$$\tan\tau = 30°$$

$\Leftarrow$
für a = 0, 5 und b = 2:

$$\tan\tau = \frac{1}{2}\,\frac{1-x}{\sqrt{x\,(2-x)}}$$

$\Leftarrow$
für $\mathrm{P}\left(+\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$:

$$\tan\tau = \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

$\Leftarrow$

$$\tan\tau = 16,102\ldots°$$

6 Parabeln

6.1 Parabel, normiert

$$a = 1 \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$y = 1 - x^2$$

1. Ableitung:

$$dy = -2 \cdot x$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -2$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = 4 \cdot x^2$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + 4 \cdot x^2$$

Bogendifferential:

$$ds = \sqrt{1 + 4 \cdot x^2}$$

Bogenlänge:

$$s = \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1 + 4x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot x^2} + \frac{1}{4} \cdot \ln\left(x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot x^2}\right)\Bigg|_{-1}^{+1}$$

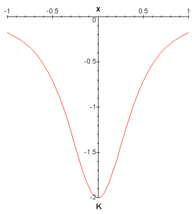
$\rightarrow$

$$s = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\sqrt{5} + 2\right) \approx 2,9579...$$

Krümmung:

$$K = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \cdot x^2}^3}$$

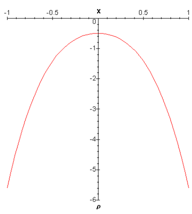
$\rightarrow$



Radius:

$$\rho = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot x^2}^3$$

$\rightarrow$



Normalenfunktionsgleichung für $P\left(-\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$:

$$f_N = \frac{1}{4} - x$$

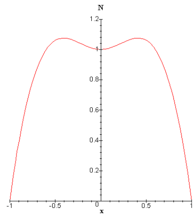
Tangentenfunktionsgleichung für $P\left(-\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$:

$$f_T = x + \frac{5}{4}$$

Länge der Normale:

$$N = \left(1 - x^2\right) \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot x^2}$$

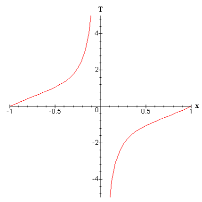
$\rightarrow$



Länge der Tangente:

$$T = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 - x^2\right) \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot x^2}}{x}$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$

$$\frac{N}{T} = -2x$$

$\rightarrow$

Parabeleigenschaft

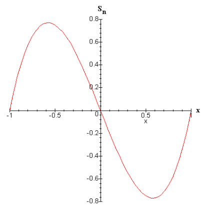
für $P\left(-\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$ gilt:

$$\frac{N}{T} = 1$$

Länge der Subnormale:

$$S_N = -2 \cdot x \cdot \left(1 - x^2\right)$$

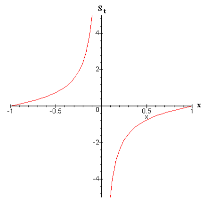
$\rightarrow$



Länge der Subtangente:

$$S_T = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x^2}{x}$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$

$$\frac{S_N}{S_T} = 4 \cdot x^2 = \left(\frac{N}{T}\right)^2$$

$\rightarrow$

Parabeleigenschaft

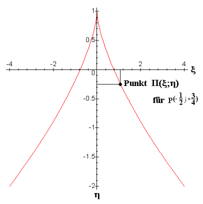
für $P\left(-\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$ gilt:

$$\frac{S_N}{S_T} = 1$$

Evolute:

$$\xi = -4 \cdot x^3 \qquad \eta = \frac{1}{2} - 3 \cdot x^2$$

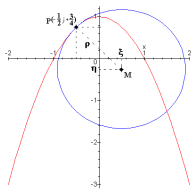
$\rightarrow$



$\Leftarrow$

$$\xi = +\frac{1}{2} \qquad \eta = -\frac{1}{4} \qquad \rho = -\sqrt{2}$$

für P$\left(-\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$



Evolvente für P$\left(-\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$:

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1+4x^2} \cdot dx\right) \cos\arctan(-2 \cdot x) = -\frac{1}{2} - 0,9050... \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx -1,1399...$$

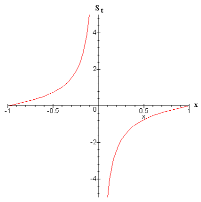
$$\eta = +\frac{3}{4} - \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1+4x^2} \cdot dx\right) \sin\arctan(-2 \cdot x) = +\frac{3}{4} - 0,9050... \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx +0,1100...$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \xi + \frac{5}{4}$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

$\rightarrow$



Evolventenwinkel für P$\left(-\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$:

$$\tan\tau = -2\cdot x = 1$$

$\Leftarrow$

$$\tau = 45^\circ$$

6.2 Parabel, quasinormiert

$$a = \text{var.} \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$y = a \cdot \left(1 - x^2\right)$$

1. Ableitung:

$$dy = -2 \cdot a \cdot x$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -2 \cdot a$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = 4 \cdot a^2 \cdot x^2$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2$$

Bogendifferential:

$$ds = \sqrt{1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2}$$

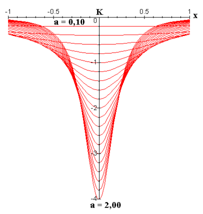
Bogenlänge:

$$s = \int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2} \cdot dx = \sqrt{1 + 4 \cdot a^2} + \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \ln\left(\sqrt{1 + 4 \cdot a^2} + 2 \cdot a\right)$$

Krümmung:

$$K = -2 \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2}^3}$$

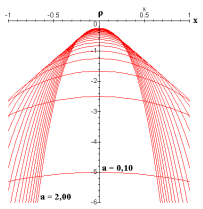
$\rightarrow$



Radius:

$$\rho = -\frac{1}{2 \cdot a} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2}^3$$

$\rightarrow$



Normalenfunktionsgleichung:

$$f_N = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot a^2 - \frac{1}{2} - x\right)$$

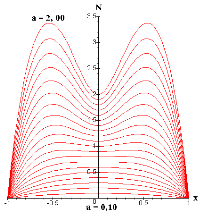
Tangentenfunktionsgleichung:

$$f_T = a \cdot \left(x + \frac{5}{4}\right)$$

Länge der Normale:

$$N = a \cdot \left(1 - x^2\right) \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2}$$

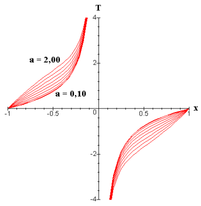
$\rightarrow$



Länge der Tangente:

$$T = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 - x^2\right) \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2}}{x}$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$

$$\frac{N}{T} = a$$

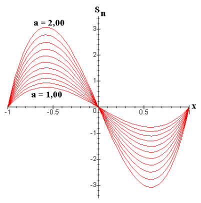
$\rightarrow$

Parabeleigenschaft

Länge der Subnormale:

$$S_N = -2 \cdot a^2 \cdot x \cdot \left(1 - x^2\right)$$

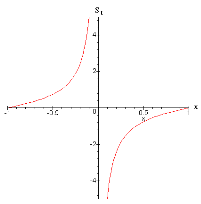
$\rightarrow$



Länge der Subtangente:

$$S_T = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - x^2}{x}$$

$\rightarrow$



$\rightarrow$

a- unabhängig

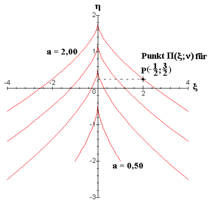
$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2 + T^2} = S_N + S_T$$

Evolute:

$$\xi = -4 \cdot a^2 \cdot x^3 \qquad \eta = a \cdot \left(1 - x^2\right) - \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \left(1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2\right)$$

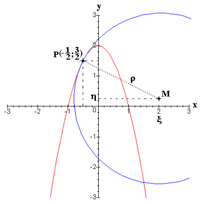
$\rightarrow$



$\Leftarrow$
für P$\left(-\frac{1}{2};+\frac{3}{2}\right)$ und $a=2$

$$\xi = 2 \qquad \eta = \frac{1}{4} \qquad \rho \approx 2,795...$$

$\rightarrow$



Evolvente:

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1+4\cdot a^2\cdot x^2}\cdot dx\right)\cos\arctan\left(-2\cdot a\cdot x\right) = -\frac{1}{2} - s|_{-1}^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4\cdot a^2\cdot x^2}}$$

$$\eta = +\frac{3}{2} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1+4\cdot a^2\cdot x^2}\cdot dx\right)\sin\arctan\left(-2\cdot a\cdot x\right) = \frac{3}{2} + s|_{-1}^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2\cdot a\cdot x}{\sqrt{1+4\cdot a^2\cdot x^2}}$$

$\Leftarrow$
für P$\left(-\frac{1}{2};+\frac{3}{2}\right)$ und $a=2$:

$$\xi = -\frac{1}{2} - 1,5839...\frac{1}{\sqrt{5}} \approx -1,208...$$

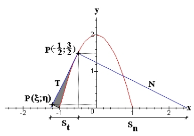
$$\eta = \frac{3}{2} - 1,5839...\frac{2}{\sqrt{5}} \approx +0,083...$$

$\Leftarrow$

$$\eta = a\cdot\left(\xi + \frac{5}{4}\right)$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

$\rightarrow$



Evolventenwinkel:

$$\tan\tau = -2\cdot a\cdot x$$

6.3 Parabel, quasireal

$$a = \frac{b^2}{4} \qquad b = \text{var.}$$

Funktionsgleichung:

$$y = x \cdot (b - x)$$

1. Ableitung:

$$dy = b - 2 \cdot x$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -2$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = (b - 2 \cdot x)^2$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + (b - 2 \cdot x)^2$$

Bogendifferential:

$$ds = \sqrt{1 + (b - 2 \cdot x)^2}$$

Bogenlänge (bei b = 2):

$$s = \int_0^b \sqrt{1 + (b - 2 \cdot x)^2} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_{+b}^{-b} \sqrt{1 + z^2} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \left[z \cdot \sqrt{1 + z^2} + \ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right)\right]\Big|_{+b}^{-b}$$

$\Rightarrow$

$$s = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{b^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(b + \sqrt{b^2 + 1}\right) \approx 2,9578...$$

$\Leftarrow$
Substitution

$$b - 2 \cdot x = z \quad \rightarrow \quad z\,(0) = +b \quad \rightarrow \quad z\,(b) = -b$$

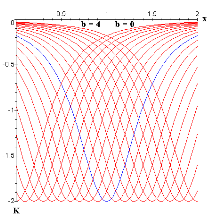
$\Leftarrow$

$$\frac{dz}{dx} = (b - 2 \cdot x)' = -2 \quad \rightarrow \quad dx = -\frac{1}{2} \cdot dz$$

Krümmung:

$$K = -\frac{2}{\sqrt{1 + (b - 2 \cdot x)^2}^3}$$

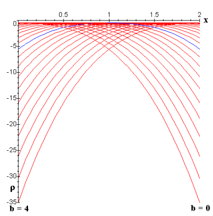
$\rightarrow$



Radius:

$$\rho = -\frac{\sqrt{1 + (b - 2 \cdot x)^2}^3}{2}$$

$\rightarrow$



Normalenfunktionsgleichung für P$\left(+\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$ und b = 2:

$$f_N = \frac{x}{1-b} - \frac{3 \cdot b - 1}{4 \cdot (1-b)} = \frac{4 \cdot x - 3 \cdot b + 1}{4 \cdot (1-b)} = \frac{5}{4} - x$$

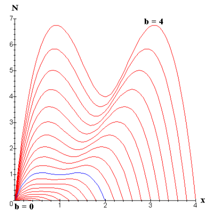
Tangentenfunktionsgleichung für P$\left(+\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$ und b = 2:

$$f_T = (b-1) \cdot x + \frac{1}{4} \cdot (5 - 2 \cdot b) = x + \frac{1}{4}$$

Länge der Normale für b = 2:

$$N = x \cdot (b-x) \sqrt{1 + (b - 2 \cdot x)^2} = x \cdot (2-x) \sqrt{1 + 4 \cdot (1-x)^2}$$

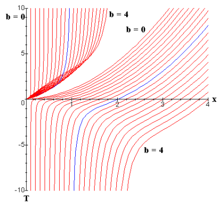
$\rightarrow$



Länge der Tangente für b = 2:

$$T = \frac{x \cdot (b-x)}{b - 2 \cdot x} \sqrt{1 + (b - 2 \cdot x)^2} = \frac{x \cdot (2-x)}{2 \cdot (1-x)} \sqrt{1 + 4 \cdot (1-x)^2}$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$

$$N \cdot \left(x = \frac{b-1}{2}\right) = T \cdot \left(x = \frac{b-1}{2}\right)$$

$\rightarrow$

Parabeleigenschaft

$\Leftarrow$

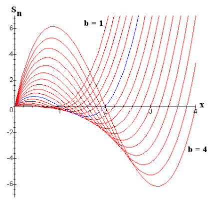
$$N \cdot \left(x = \frac{1}{2}\right) = T \cdot \left(x = \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 1,060...$$

mit b = 2

Länge der Subnormale mit b = 2:

$$S_N = x \cdot (b-x) \cdot (b - 2x) = 2 \cdot x \cdot (2-x) \cdot (1-x)$$

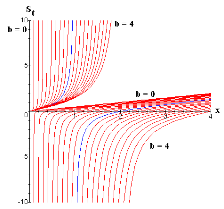
$\rightarrow$



Länge der Subtangente mit b = 2:

$$S_T = \frac{x \cdot (b-x)}{b - 2 \cdot x} = \frac{x \cdot (2-x)}{2 \cdot (1-x)}$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$

$$S_N \left(x = \frac{b+1}{2} \right) = S_T \left(x = \frac{b+1}{2} \right)$$

$\rightarrow$

Parabeleigenschaft

$\Leftarrow$

$$S_N \left(x = \frac{b-1}{2} \right) = S_T \left(x = \frac{b-1}{2} \right)$$

$\Leftarrow$

$$S_N \left(x = \frac{1}{2} \right) = S_T \left(x = \frac{1}{2} \right) = +\frac{3}{4}$$

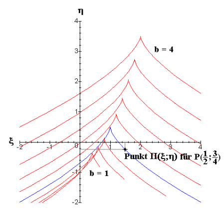
$\Leftarrow$

$$S_N \left(x = \frac{3}{2} \right) = S_T \left(x = \frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{4}$$

Evolute mit b = 2:

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \left(b + (b - 2 \cdot x)^3 \right) \qquad \eta = x \cdot (b-x) - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (b - 2 \cdot x)^2 \right)$$

$\rightarrow$



$\Rightarrow$

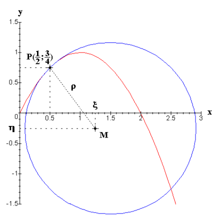
$$\xi = 1 + 4 \cdot (1-x)^3 \qquad \eta = x \cdot (2-x) - 2 \cdot (1-x)^2 - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\xi = \frac{3}{2} \qquad \eta = -\frac{1}{4} \qquad \rho = \sqrt{2} \approx 1,414...$$

$\rightarrow$

für P$\left(+\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$



Evolvente für P$\left(+\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$:

$$\xi=+\frac{1}{2}-\left(\int\limits_{0}^{+\frac{1}{2}}\sqrt{1+(b-2x)^2}\cdot dx\right)\cos\arctan\left(b-2\cdot x\right)=\frac{1}{2}-\left.s\right|_{0}^{+\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+(2\cdot x-b)^2}}$$

$$\eta=+\frac{3}{4}-\left(\int\limits_{0}^{+\frac{1}{2}}\sqrt{1+(b-2x)^2}\cdot dx\right)\sin\arctan\left(b-2\cdot x\right)=\frac{3}{4}-\left.s\right|_{0}^{+\frac{1}{2}}\frac{b-2\cdot x}{\sqrt{1+(2\cdot x-b)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\xi=\frac{1}{2}-\left.s\right|_{0}^{+\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+4\cdot(x-1)^2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\sqrt{2}\cdot\left.s\right|_{0}^{+\frac{1}{2}}\right)\approx\frac{1}{2}\cdot\left(1-0,905...\sqrt{2}\right)$$

$$\eta=\frac{3}{4}-2\cdot\left.s\right|_{0}^{+\frac{1}{2}}\frac{1-x}{\sqrt{1+4\cdot(x-1)^2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\cdot\left.s\right|_{0}^{+\frac{1}{2}}\right)\approx\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-0,905...\sqrt{2}\right)$$

$\Rightarrow$

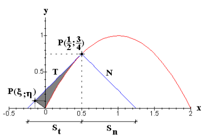
$$\xi\approx-0,1399...\qquad\qquad\eta\approx+0,1100...$$

$\Leftarrow$

$$\eta=(b-1)\cdot\eta+\frac{1}{4}\cdot(5-2\cdot b)=\xi+\frac{1}{4}$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

$\rightarrow$



Evolventenwinkel für P$\left(+\frac{1}{2};+\frac{3}{4}\right)$ mit b = 2:

$$\tan\tau=b-2\cdot x=1$$

$\Leftarrow$

$$\tau=45^\circ$$

6.4 Parabel, real - Methode P

$$a = \text{var.} \qquad b = \text{var.}$$

Funktionsgleichung:

$$y = 4 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot x \cdot (b - x)$$

1. Ableitung:

$$dy = 4 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot (b - 2 \cdot x)$$

2. Ableitung:

$$d^2y = -8 \cdot \frac{a}{b^2}$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = 16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + 16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2 = \frac{b^4 + 16 \cdot a^2 \cdot (b - 2 \cdot x)^2}{b^4}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{1}{b^2} \cdot \sqrt{b^4 + 16 \cdot a^2 \cdot (b - 2 \cdot x)^2}$$

Bogenlänge:

$$s = \frac{1}{b^2} \cdot \int_0^b \sqrt{b^4 + 16 \cdot a^2 \cdot (b - 2 \cdot x)^2} \cdot dx = -\frac{1}{8 \cdot a \cdot b^2} \cdot \int_{+4ab}^{-4ab} \sqrt{b^4 + z^2} \cdot dz$$

$\Rightarrow$

$$s = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \sqrt{b^4 + z^2} + \frac{1}{2} \cdot b^4 \cdot \ln\left(z + \sqrt{b^4 + z^2}\right)\Big|_{+4ab}^{-4ab} \cdot \frac{-1}{8 \cdot a \cdot b^2}$$

$\Rightarrow$

$$s = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + 16 \cdot a^2} + \frac{b^2}{16 \cdot a} \cdot \ln\left(\frac{4 \cdot a + \sqrt{b^2 + 16 \cdot a^2}}{\sqrt{b^2 + 16 \cdot a^2} - 4 \cdot a}\right)$$

$\Rightarrow$
bei b = 2 und a = 1:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} + \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{4 + \sqrt{20}}{\sqrt{20} - 4}\right) \approx 2{,}9578...$$

$\Leftarrow$
Substitution

$$4 \cdot a \cdot (b - 2 \cdot x) = z \quad \rightarrow \quad z\,(0) = +4 \cdot a \cdot b \quad \rightarrow \quad z\,(b) = -4 \cdot a \cdot b$$

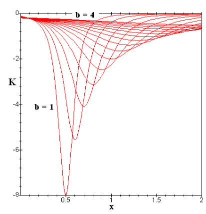
$\Leftarrow$

$$\frac{dz}{dx} = (4 \cdot a \cdot b - 8 \cdot a \cdot x)' = -8 \cdot a \quad \rightarrow \quad dx = -\frac{1}{8 \cdot a} \cdot dz$$

Krümmung:

$$K = -8 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2 + 1}^{\,3}}$$

$\rightarrow$



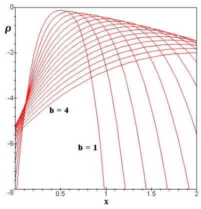
⇒
bei b = 2 und a = 1:

$$K = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot (1-x)^2 + 1}^3}$$

Radius:

$$\rho = -\frac{b^2}{8 \cdot a} \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2 + 1}^3$$

→



⇒
bei b = 2 und a = 1:

$$\rho = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{16 \cdot (1-x)^2 + 1}^3$$

Normalenfunktionsgleichung für P$\left(\frac{1}{4}b; \frac{3}{4}a\right)$:

$$f_N = \frac{b^2 + 6 \cdot a^2}{8 \cdot a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot x$$

⇒
bei b = 2 und a = 1:

$$f_N = \frac{5}{4} - x$$

Tangentenfunktionsgleichung für P$\left(\frac{1}{4}b; \frac{3}{4}a\right)$:

$$f_T = 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot a$$

⇒
bei b = 2 und a = 1:

$$f_T = x + \frac{1}{4}$$

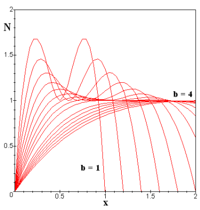
Länge der Normale:

$$N = 4 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot x \cdot (b - x) \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2 + 1}$$

⇒
bei b = 2 und a = 1:

$$N = x \cdot (2 - x) \cdot \sqrt{4 \cdot (1-x)^2 + 1}$$

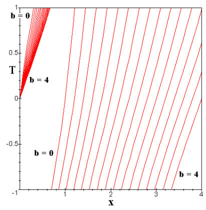
→



Länge der Tangente:

$$T = x \cdot \frac{b - x}{b - 2 \cdot x} \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2 + 1}$$

→



$\Rightarrow$
bei b = 2 und a = 1:

$$T = \frac{x \cdot (2-x)}{2 \cdot (1-x)} \sqrt{4 \cdot (1-x)^2 + 1}$$

$\Leftarrow$

$$\frac{N}{T} = 4 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot (b - 2 \cdot x) \quad \rightarrow \quad 4 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot (b - 2 \cdot x) = 1 \quad \rightarrow \quad x = b \cdot \frac{4-b}{8 \cdot a}$$

$\Rightarrow$
bei b = 2 und a = 1:

$$x = \frac{1}{2}$$

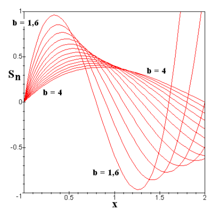
$\rightarrow$

Parabeleigenschaft

Länge der Subnormale:

$$S_N = 16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot x \cdot (b-x)\,(b - 2 \cdot x)$$

$\rightarrow$



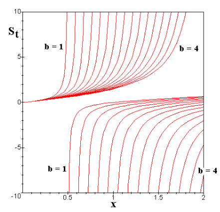
$\Rightarrow$
bei b = 2 und a = 1:

$$S_N = 2 \cdot x \cdot (2-x) \cdot (1-x)$$

Länge der Subtangente:

$$S_T = x \cdot \frac{b-x}{b - 2 \cdot x}$$

$\rightarrow$



$\rightarrow$

a- unabhängig

$\Rightarrow$
bei b = 2:

$$S_T = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2-x}{1-x}$$

$\Leftarrow$

$$\frac{S_N}{S_T} = 16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2 = \left(\frac{N}{T}\right)^2$$

$\rightarrow$

$$16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2 = 1$$

$\rightarrow$

$$x_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{b}{a} \cdot (4 \cdot a - b) \qquad x_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{b}{a} \cdot (4 \cdot a + b)$$

$\Rightarrow$

bei b = 2 und a = 1:

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{3}{2}$$

$\rightarrow$

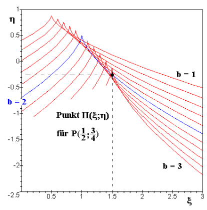
Parabeleigenschaft

Evolute:

$$\xi = x + \frac{1}{2} \cdot \left(16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2 + 1\right) \cdot (b - 2 \cdot x) = x + \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \frac{N}{T} \cdot \left(\frac{S_N}{S_T} + 1\right)$$

$$\eta = 4 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot x \cdot (b - x) - \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \left(16 \cdot \frac{a^2}{b^4} \cdot (b - 2 \cdot x)^2 + 1\right) = y - \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \left(\frac{S_N}{S_T} + 1\right)$$

$\rightarrow$



$\Leftarrow$

bei b = 2 und a = 1:

$$\xi = x + \left(4 \cdot (1 - x)^2 + 1\right) \cdot (1 - x) = 1 + 4 \cdot (1 - x)^3$$

$$\eta = x \cdot (2 - x) - \frac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot (1 - x)^2 + 1\right) = x \cdot (2 - x) - 2 \cdot (1 - x)^2 - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

für P$\left(\frac{1}{4}b; \frac{3}{4}a\right) \rightarrow$ P $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$

$$\xi = +\frac{3}{2} \qquad \eta = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{N}{T} = \frac{\xi - x}{y - \eta} = 4 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot (b - 2 \cdot x) \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{S_N}{S_T}} = \frac{\xi - x}{y - \eta} \quad \rightarrow \quad \frac{S_N}{S_T} = \left(\frac{\xi - x}{y - \eta}\right)^2$$

$\Leftarrow$

bei b = 2 und a = 1 und P$\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$:

$$\frac{N}{T} = \sqrt{\frac{S_N}{S_T}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{N}{T} = \sqrt{\frac{S_N}{S_T}} = 1$$

Evolvente für P$\left(\frac{1}{4}b; \frac{3}{4}a\right)$:

$$\xi = \frac{1}{4}b - s|_0^{\frac{1}{4}b} \cos \arctan\left(\frac{N}{T}\right) = \frac{1}{4} \cdot b - \frac{s|_0^{\frac{1}{4}b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{N}{T}\right)^2}} = \frac{1}{4} \cdot b - \frac{s|_0^{\frac{1}{4}b}}{\sqrt{1 + \frac{S_N}{S_T}}} = \frac{1}{4} \cdot b - \frac{s|_0^{\frac{1}{4}b}}{ds}$$

$$\eta = \frac{3}{4} \cdot a - s|_0^{\frac{1}{4}b} \sin \arctan\left(\frac{N}{T}\right) = \frac{3}{4} \cdot a - \frac{\frac{N}{T} \cdot s|_0^{\frac{1}{4}b}}{\sqrt{1+\left(\frac{N}{T}\right)^2}} = \frac{3}{4} \cdot a - \frac{\sqrt{\frac{S_N}{S_T}} \cdot s|_0^{\frac{1}{4}b}}{\sqrt{1+\frac{S_n}{S_t}}} = \frac{3}{4} \cdot a - \sqrt{\frac{S_n}{S_t}} \cdot \frac{s|_0^{\frac{1}{4}b}}{ds}$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \frac{3}{4} \cdot a - \frac{N}{T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot b - \xi\right) = \frac{3}{4} \cdot a - \sqrt{\frac{S_N}{S_T}} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot b - \xi\right) \quad \to \quad \eta = \frac{1}{4} + \xi$$

$\Rightarrow$

$$s|_0^{\frac{b}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{b^2 + 16 \cdot a^2} - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{b^2 + 4 \cdot a^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot a + \sqrt{b^2 + 4 \cdot a^2}}{4 \cdot a + \sqrt{b^2 + 16 \cdot a^2}}\right)$$

$\Leftarrow$
bei b = 2 und a = 1:

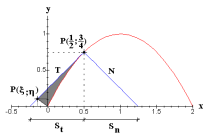
$$s|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{20} - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{8} - \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{2+\sqrt{8}}{4+\sqrt{20}}\right) \approx 0,9050...$$

$\Rightarrow$

$$\xi = \frac{1}{4}b - \frac{s|_0^{\frac{b}{4}}}{\sqrt{1+16\frac{a^2}{b^4}\left(b-2x\right)^2}} \approx \frac{1}{2} - \frac{0,9050...}{1,4142...} = -0,1399...$$

$$\eta = \frac{3}{4}a - 8\frac{a\left(b-2x\right)s|_0^{\frac{b}{4}}}{\sqrt{b^4 + 16a^2\left(b-2x\right)^2}} \approx \frac{3}{4} - \frac{0,9050...}{1,4142...} = +0,1100..$$

$\rightarrow$



Evolventenwinkel für P$\left(\frac{1}{4}b; \frac{3}{4}a\right)$:

$$\tan\tau = 4\frac{a}{b^2}\left(b-2x\right) = \frac{N}{T} = \sqrt{\frac{S_n}{S_t}} = \frac{\xi - x}{y - \eta}$$

$\rightarrow$
bei b = 2 und a = 1 und P$\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$:

$$\tan\tau = 2 \cdot (1-x) \quad \rightarrow \quad \tan\tau = 1 \quad \rightarrow \quad \tau = 45°$$

7 Dreiecke

7.1 Dreieck, normiert

$$a = 1 \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$\begin{aligned} y &= x + 1 && \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ y &= 1 - x && \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

1. Ableitung:

$$\begin{aligned} dy &= +1 && \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ dy &= -1 && \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

2. Ableitung:

$$d^2y = 0$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = 1$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 2$$

Bogendifferential:

$$ds = \sqrt{2}$$

Bogenlänge:

$$s = \int_{-1}^{+1} \sqrt{2} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot x \Big|_{+1}^{-1} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

Krümmung:

$$K = 0$$

Radius:

$$\rho \to \infty$$

Normalenfunktionsgleichung für $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$:

$$f_N = -x$$

Tangentenfunktionsgleichung für $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$:

$$f_T = x + 1$$

Länge der Normale für $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$:

$$N = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Länge der Tangente für $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Länge der Subnormale für $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$:

$$S_N = \frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente für $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$:

$$S_T = \frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2 + T^2} = S_N + S_T$$

Evolute:

$$\xi = \text{undefinable} \qquad \eta = \text{undefinable}$$

Evolvente für P$\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$:

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2} \cdot dx\right) \cos\arctan(+1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$\eta = -\frac{1}{2} + 1 - \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2} \cdot dx\right) \sin\arctan(+1) = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$\Leftarrow$

$$\eta = \xi + 1$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel:

$$\tan\tau = 1$$

$\Leftarrow$

$$\tau = 45^\circ$$

7.2 Dreieck, quasinormiert

$$a = \text{var.} \qquad b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$y = a \cdot (x+1) \quad \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0$$
$$y = a \cdot (1-x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1$$

1. Ableitung:

$$dy = +a \quad \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0$$
$$dy = -a \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1$$

2. Ableitung:

$$d^2y = 0$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = a^2$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = a^2 + 1$$

Bogendifferential:

$$ds = \sqrt{a^2+1}$$

Bogenlänge:

$$s = \int_{-1}^{+1} \sqrt{a^2+1} \cdot dx = \sqrt{a^2+1} \cdot x \Big|_{+1}^{-1} = 2 \cdot \sqrt{a^2+1}$$

Krümmung:

$$K = 0$$

Radius:

$$\rho \to \infty$$

Normalenfunktionsgleichung:

$$f_N = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{a^2-1}{2} - x \right)$$

Tangentenfunktionsgleichung:

$$f_T = a \cdot (x+1)$$

Länge der Normale:

$$N = \sqrt{a^2+1} \cdot (x+1) \cdot a$$

Länge der Tangente:

$$T = \sqrt{a^2+1} \cdot (x+1)$$

Länge der Subnormale:

$$S_N = a^2 \cdot (x+1)$$

Länge der Subtangente:

$$S_T = (x+1)$$

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2+T^2} = S_N + S_T$$

Evolute:

$$\xi = \text{undefinable} \qquad \eta = \text{undefinable}$$

Evolvente für P$\left(-\frac{1}{2}; +\frac{a}{2}\right)$:

$$\xi = -\frac{1}{2} - \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{a^2+1} \cdot dx \right) \cos\arctan(a) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = -1$$

$$\eta = +\frac{a}{2} - \left(\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{a^2+1} \cdot dx \right) \sin \arctan (a) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2+1} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = 0$$

$\Leftarrow$

$$\eta = a \cdot (\xi + 1)$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel:

$$\tan \tau = a$$

7.3 Dreieck, quasireal

$$a = 1 \qquad b = \text{var.}$$

Funktionsgleichung:

$$y = 2 \cdot \frac{x}{b} \qquad \text{für} \qquad 0 \le x \le \frac{b}{2}$$
$$y = 2 \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right) \qquad \text{für} \qquad \frac{b}{2} \le x \le b$$

1. Ableitung:

$$dy = +\frac{2}{b} \qquad \text{für} \qquad 0 \le x \le \frac{b}{2}$$
$$dy = -\frac{2}{b} \qquad \text{für} \qquad \frac{b}{2} \le x \le b$$

2. Ableitung:

$$d^2y = 0$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = \frac{4}{b^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + \frac{4}{b^2} = \frac{b^2+4}{b^2}$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{\sqrt{b^2+4}}{b}$$

Bogenlänge und b = 2:

$$s = \frac{\sqrt{4+b^2}}{b} \cdot \int_0^b dx = \frac{\sqrt{4+b^2}}{b} \cdot x \Big|_0^b = \sqrt{4+b^2} = \sqrt{8}$$

Krümmung:

$$K = 0$$

Radius:

$$\rho \to \infty$$

Normalenfunktionsgleichung für $P\left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$ und b = 2:

$$f_N = -\frac{2}{b} \cdot (x-1) = 1 - x$$

Tangentenfunktionsgleichung für $P\left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$ und b = 2:

$$f_T = 2 \cdot \frac{x}{b} = x$$

Länge der Normale und b = 2:

$$N = \frac{2 \cdot x}{b^2} \cdot \sqrt{b^2+4} = \sqrt{2} \cdot x$$

Länge der Tangente und b = 2:

$$T = \frac{x}{b} \cdot \sqrt{b^2+4} = \sqrt{2} \cdot x$$

Länge der Subnormale und b = 2:

$$S_N = \frac{4}{b^2} \cdot x = x$$

Länge der Subtangente:

$$S_T = x$$

$\rightarrow$

b- unabhängig

$\Leftarrow$

$$\sqrt{N^2+T^2}=S_N+S_T$$

Evolute:

$$\xi=\text{undefinable}\qquad\qquad \eta=\text{undefinable}$$

Evolvente für$P\left(+\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right)$ und b = 2:

$$\xi=+\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{4+b^2}}{b}\cdot\int\limits_0^{\frac{b}{4}}dx\right)\cos\arctan\left(\frac{2}{b}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{4+b^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{4+b^2}}=0$$

$$\eta=+\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{4+b^2}}{b}\cdot\int\limits_0^{\frac{b}{4}}dx\right)\sin\arctan\left(\frac{2}{b}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{4+b^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4+b^2}}=0$$

$\Leftarrow$

$$\xi=2\cdot\frac{\eta}{b}$$

Aus der Tangentenfunktionsgleichung

Evolventenwinkel und b = 2:

$$\tan\tau=\frac{2}{b}=1$$

$\Rightarrow$

$$\tau=45^\circ$$

7.4 Dreieck, real - Methode T

$$a = \text{var.} \qquad b = \text{var.}$$

Funktionsgleichung:

$$y = 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot x \qquad \text{für} \qquad 0 \le x \le \frac{b}{2}$$
$$y = 2 \cdot a \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right) = 2 \cdot a - 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot x \qquad \text{für} \qquad \frac{b}{2} \le x \le b$$

1. Ableitung:

$$dy = +2 \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{für} \qquad 0 \le x \le \frac{b}{2}$$
$$dy = -2 \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{für} \qquad \frac{b}{2} \le x \le b$$

2. Ableitung:

$$d^2y = 0$$

Quadrat der 1. Ableitung:

$$dy^2 = 4 \cdot \frac{a^2}{b^2}$$

Quadratbogendifferential:

$$ds^2 = 1 + 4 \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{4 \cdot a^2 + b^2}{b^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \left(4 \cdot a^2 + b^2\right)$$

Bogendifferential:

$$ds = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + b^2}$$

Bogenlänge:

$$s = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + b^2} \int\limits_0^b dx = x|_0^b \cdot \frac{1}{b} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + b^2} = \sqrt{4 \cdot a^2 + b^2}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$s = \sqrt{8} \approx 2,828...$$

Krümmung:

$$K = 0$$

Radius:

$$\rho \to \infty$$

Normalenfunktionsgleichung für $P\left(\frac{b}{4}; \frac{a}{2}\right)$:

$$f_N = \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{a} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot x = \frac{1}{8} \cdot \frac{b}{a} \cdot (b - 4 \cdot x) + \frac{a}{2}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$f_N = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2 \cdot x) + \frac{1}{2} = 1 - x$$

Tangentenfunktionsgleichung für $P\left(\frac{b}{4}; \frac{a}{2}\right)$:

$$f_T = 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot x$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$f_T = x$$

Länge der Normale:

$$N = 2 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + b^2}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$N = x \cdot \sqrt{2}$$

$\Leftarrow$
und $P\left(\frac{b}{4}; \frac{a}{2}\right) \rightarrow P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:

$$N = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,707...$$

Länge der Tangente und b = 2:

$$T = \frac{x}{b} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + b^2}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$T = x \cdot \sqrt{2}$$

$\Leftarrow$
und $P\left(\frac{b}{4}; \frac{a}{2}\right) \rightarrow P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,707...$$

$\leftarrow$

$$\frac{N}{T} = 2 \cdot \frac{a}{b}$$

$\rightarrow$

x- unabhängig

$\rightarrow$

Dreieckseigenschaft

$\Leftarrow$

$$\frac{N}{T} = 2 \cdot \frac{a}{b} = 1 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot a = b$$

Länge der Subnormale:

$$S_N = 4 \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot x \qquad \text{für} \qquad 0 \leq x < \frac{b}{2}$$
$$S_N = 4 \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot x - 4 \cdot \frac{a^2}{b} = 4 \cdot \frac{a^2}{b} \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot x - 1\right) \qquad \text{für} \qquad \frac{b}{2} \leq x < b$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$S_N = x \qquad \text{für} \qquad 0 \leq x < 1$$
$$S_N = x - 2 \qquad \text{für} \qquad 1 \leq x < 2$$

$\Leftarrow$
und $P\left(\frac{b}{4}; \frac{a}{2}\right) \rightarrow P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:

$$S_N = \frac{1}{2}$$

Länge der Subtangente:

$$S_T = x \quad \text{für} \quad 0 \leq x < \frac{b}{2}$$

$\rightarrow$

a- und b- unabhängig

$$S_T = x - b \quad \text{für} \quad \frac{b}{2} \leq x < b$$

$\rightarrow$

a- unabhängig

$\Leftarrow$
b = 2:

$$\begin{aligned} S_T &= x && \text{für} && 0 \leq x < 1 \\ S_T &= x - 2 && \text{für} && 1 \leq x < 2 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$
und $P\left(\frac{b}{4}; \frac{a}{2}\right) \rightarrow P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:

$$S_T = \frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$

$$\frac{S_N}{S_T} = 4 \cdot \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{N}{T}\right)^2$$

Evolute:

$$\xi = \text{undefinable} \qquad \eta = \text{undefinable}$$

Evolvente:

$$\xi = x - \frac{1}{b} \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + b^2} \cos \arctan\left(\pm 2 \cdot \frac{a}{b}\right) = x - \frac{1}{b} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot a^2 + b^2}{1 + 4 \cdot \frac{a^2}{b^2}}}$$

$$\eta = y - \frac{1}{b} \cdot x \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 + b^2} \sin \arctan\left(\pm 2 \cdot \frac{a}{b}\right) = y - 2 \cdot \frac{a}{b^2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot a^2 + b^2}{1 + 4 \cdot \frac{a^2}{b^2}}}$$

$\Leftarrow$

$$\xi = x - x = 0 \qquad \eta = y - 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot x$$

$\rightarrow$

$$\frac{y - \eta}{x} = 2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{N}{T} = \sqrt{\frac{S_N}{S_T}}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$y = \eta + x$$

$\Leftarrow$
und $P\left(\frac{b}{4}; \frac{a}{2}\right) \rightarrow P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:

$$\eta = 0$$

Evolventenwinkel:

$$\begin{aligned} \tan \tau &= +2 \cdot \frac{a}{b} && \text{für} && 0 \leq x \leq \frac{b}{2} \\ \tan \tau &= -2 \cdot \frac{a}{b} && \text{für} && \frac{b}{2} \leq x \leq b \end{aligned}$$

$\Leftarrow$
für a = 1 und b = 2:

$$\begin{aligned} \tan \tau &= +1 && \text{für} && 0 \leq x \leq 1 \\ \tan \tau &= -1 && \text{für} && 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \tau &= +45^\circ && \text{für} && 0 \leq x \leq 1 \\ \tau &= -45^\circ && \text{für} && 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

$\rightarrow$

x- unabhängig

8 Anhang

8.1 Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen

Zum Teil historisch aus ersten Versionen!

Bezeichner	**Bedeutung**	**Einheit**
x	Definitionsbereich	[-]
y	Wertebereich	[-]
dy	1. Ableitung	[-]
d^2y	2. Ableitung	[-]
dy^2	Quadrat der 1. Ableitung	[-]
ds^2	Quadrat des Bogendifferentials	[-]
ds	Bogendifferential	[-]
s	Bogenlänge	[LE]
K	Krümmung	[LE]
ρ	Radius	[LE]
f_n	Normalenfunktionsgleichnung	[-]
f_t	Tangentenfunktionsgleichung	[-]
N	Länge der Normale	[LE]
T	Länge der Tangente	[LE]
S_n	Länge der Subnormale	[LE]
S_t	Länge der Subtangente	[LE]
ξ ; η	Lage der Krümmungsmittelpunkte	[-]
$\tan\tau$	Evolentenwinkel	[$^\circ$,rad]
x	Mittelpunktskoordinate des KK[1] für KP[2] $P\left(x, f\left(x\right)\right)$	[-]
h	Mittelpunktskoordinate des KK für KP $P\left(x, f\left(x\right)\right)$	[-]
a	vertikaler Formfaktor = y_{max}	[-]
b	horizontaler Formfaktor =$\lvert x_1 - x_2\rvert$	[-]
r	Radius des vollständigen Kreises bei C/S	[LE]
y_m	vertikale Exzentrizität KMP[3] zum KU[4] bei C/S	[-]
x_m	horizontale Exzentrizität KMP zum KU bei C/S	[-]
$\rvert_{x_2}^{x_1}$	Stammfunkton in den Grenzen x_1 und x_2	[-]

[1] KK = Krümmungskreis
[2] KP = Kurvenpunkt
[3] KMP = Kreismittelpunkt
[4] KU = Koordinatenursprung

8.2 Damals als Student

Die damalige Technik, welche mir 1996 zur Verfügung stand.

- **Hardware:**

  486 SX - 25 als Terminal in einem Netzwerk

- **Software:**

  MS- DOS + diverse Systemerweiterungen

  Windows 3. 11

  Shell Norton

  Netzwerk Novell

- **Anwendungen:**

  Wordpad Textverarbeitung

  Paint Grafiken

  Maple V

  Mapleinterner Schriftsatz als Formeleditor

- **Druck:**

  Epson im Netzwerk

... und heute haben wir Gott sei es gedankt

$\LaTeX\,2_\varepsilon$